



Universidad  
de Guanajuato



# Simulación de flujos multifásicos en medios porosos

MIQ Carlos Enrique Alvarado Rodríguez

Universidad de Guanajuato

Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares

Estancia Doctoral Enero-Noviembre 2014



instituto nacional de  
investigaciones nucleares

Environmental | Physics | Laboratory



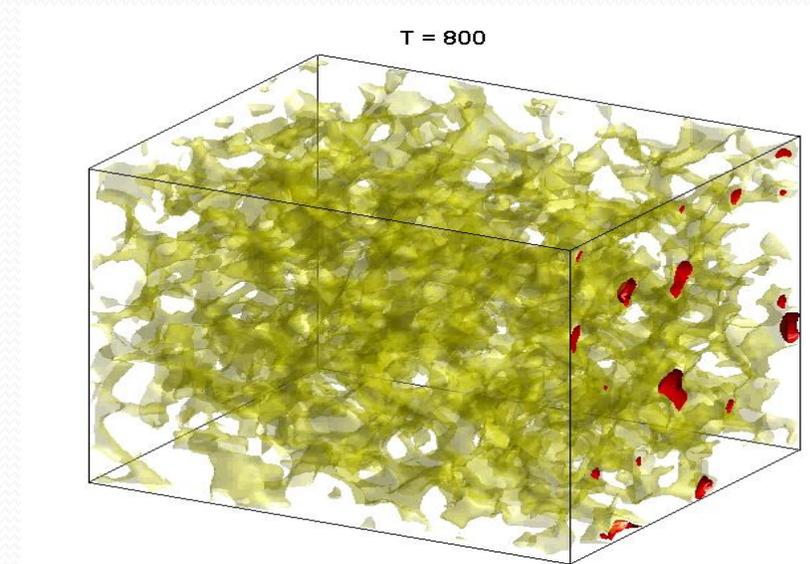
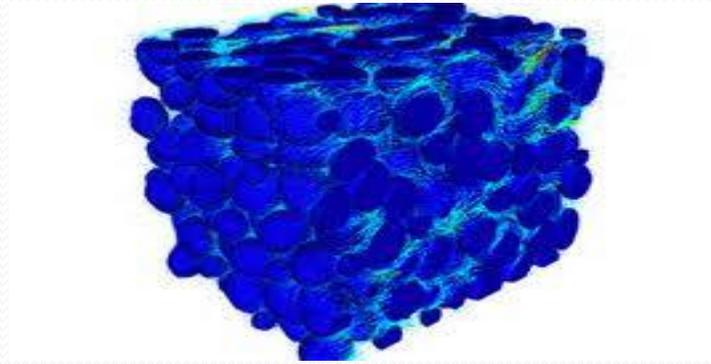
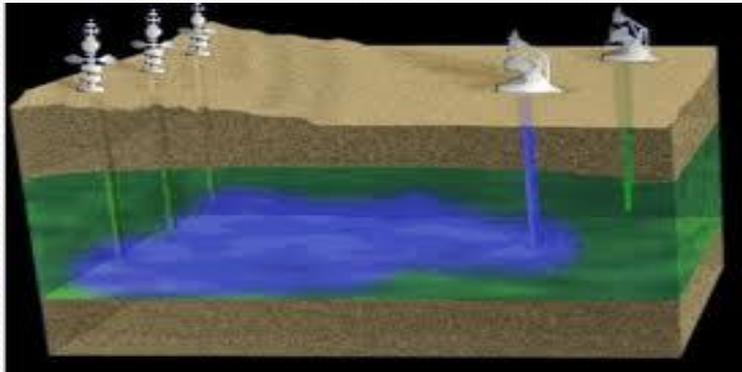
# Presentación

- Antecedentes
- Formalismo matemático
- Implementaciones
- Validaciones
- Casos de estudio
- Conclusiones
- Trabajo a Futuro

# Antecedentes

El análisis del flujo multifásicos en medios porosos es de vital importancia para la toma de decisiones durante el proceso de extracción de crudo. Parámetros como permeabilidad relativa y absoluta, porosidad, tensión superficial, entre otros son indispensables para dicho análisis.

Este tipo de parámetros generalmente se obtienen experimentalmente, sin embargo pueden ser aproximados utilizando herramientas computacionales como la Dinámica Computacional de fluidos (CFD). Por otro lado, es posible realizar experimentos numéricos y evaluar diferentes tipos de fluidos utilizados en el proceso de extracción.



# Método SPH

Desarrollado por Lucy, Gingold y Monaghan en 1977, es un método sin malla que utiliza partículas para representar fluidos en superficie libres (Monaghan, 1992).

El principio fundamental del método es aproximar cualquier función  $A(\mathbf{r})$  mediante:

$$A(\mathbf{r}) = \int A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}'$$

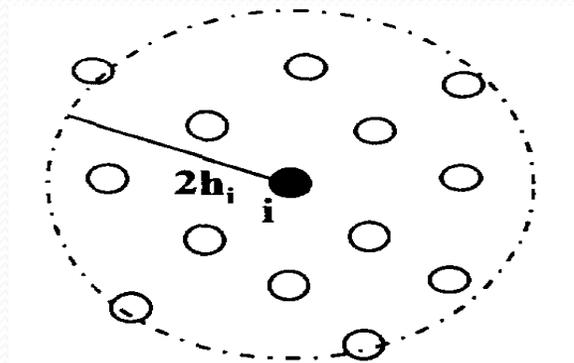
$$A(\mathbf{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h)$$

$$\nabla A(\mathbf{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_b, h).$$

Kernel Quintic, (Wendland,1995)

$$W(r, h) = \alpha_D \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1) \quad 0 \leq q \leq 2$$

Donde  $h$  es la longitud de suavizado y  $r$  es la distancia entre partículas



# DualSPHysics

DualSPHysics es un código desarrollado por la Universidad de Vigo y Universidad de Manchester basado en el código SPHysics desarrollado en Fortran (Gesteira et al, 2012).

DualSPHysics puede realizar simulaciones de fluidos en superficies libres utilizando procesadores CPU y GPU y esta desarrollado sobre lenguaje C++ y CUDA, <http://dual.sphysics.org>



# Formalismo matemático DualSPHysics V3

Ecuación de momento y viscosidad artificial

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g}$$

Ecuación de momento y viscosidad laminar

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = & -\sum_b m_b \left( \frac{P_b}{\rho_b^2} + \frac{P_a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} \\ & + \sum_b m_b \left( \frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)(r_{ab}^2 + \eta^2)} \right) \mathbf{v}_{ab} \\ & + \sum_b m_b \left( \frac{\vec{\tau}_{ij}^b}{\rho_b^2} + \frac{\vec{\tau}_{ij}^a}{\rho_a^2} \right) \nabla_a W_{ab} \end{aligned}$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}$$

Ecuación de estado

$$P = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right]$$

Ecuación de desplazamiento

$$\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{v}_a + \varepsilon \sum_b \frac{m_b}{\rho_{ab}} \mathbf{v}_{ba} W_{ab}$$

# Implementación en densidad de referencia

Con la finalidad de simular densidades diferentes , se realizaron los siguientes cambios en la versión 3 (Colagrossi y Landrini, 2003).

Ecuacion de estado con diferente densidad de referencia

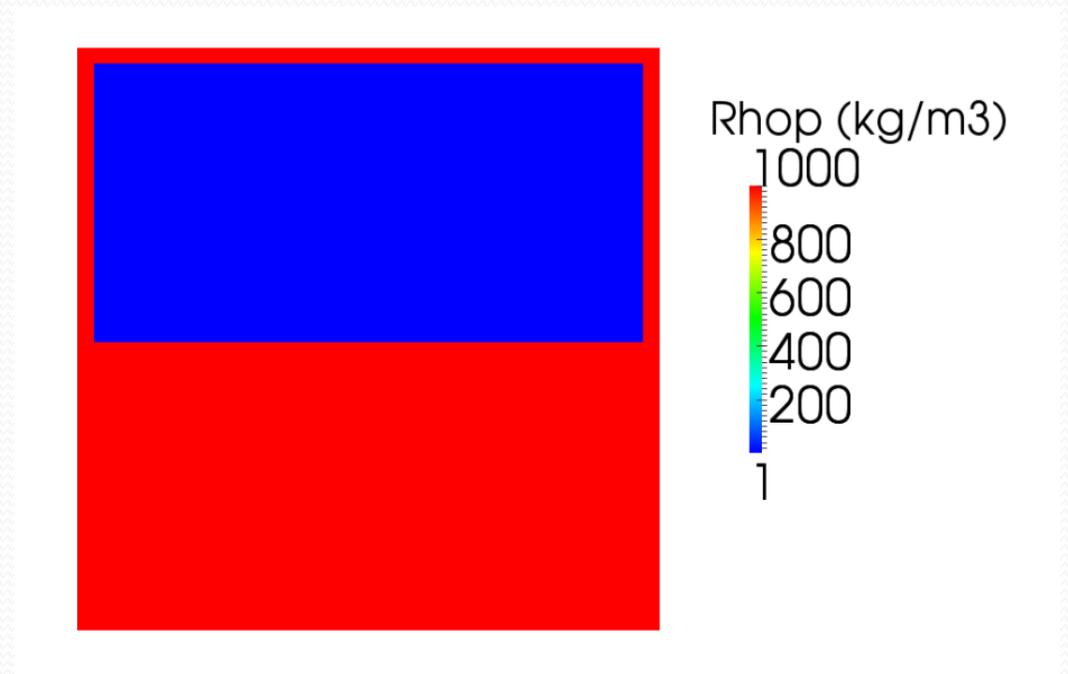
$$P = B_X * \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{0X}} \right)^{\gamma_X} - 1 \right] \quad P = B_Y * \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{0Y}} \right)^{\gamma_Y} - 1 \right]$$

Ecuación de momento

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij}$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j \rho_i \frac{m_j}{\rho_j} (v_i - v_j) \cdot \nabla_i W_{ij}$$



# Implementación concentración y difusión

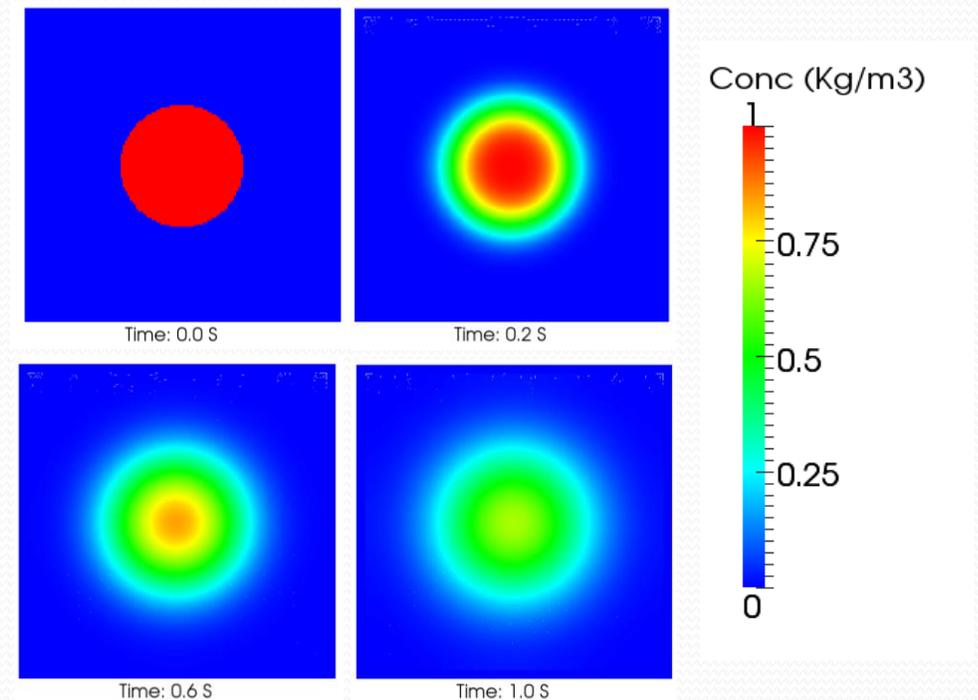
Con la finalidad de calcular la dispersión de contaminantes en medios porosos, se agregó al código la variable concentración y la ecuación de difusión obtenida a partir de la ley de Fick (Tartakovsky et al , 2007) .

Ecuación de difusión

$$\frac{DC_i}{Dt} = \sum_b^N \frac{(m_j \rho_i D_i + m_i \rho_j D_j)}{\rho_i \rho_j} \frac{r_{ij} \cdot \nabla_i W_j(r_i)}{r_{ij}^2 + \eta^2} C_{ij}$$

Algoritmo Verlet

$$C_i(t + \Delta t) = \left[ C_i(t) + 0.5\Delta t \left\{ \frac{dC_i(t)}{dt} + \frac{dC_i(t + \Delta t)}{dt} \right\} \right]$$



# Cadena de Radionúclidos

Utilizando la ecuación de concentración se inserto el término de decaimiento radiactivo, con esto es posible calcular el transporte en una cadena de radionuclidos .

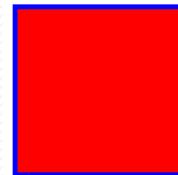
Ecuación de decaimiento y cadena de Radionúclidos

$$-\frac{dN_n}{Dt} = \lambda N_n - \lambda N_{n+1}$$

$$T_{1/2} = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

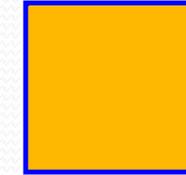
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Radionuclido 1



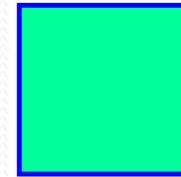
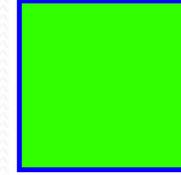
Time: 0.0 s

Radionuclido 2

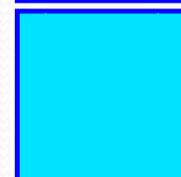
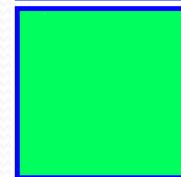
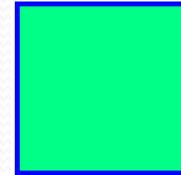


Time: 0.2 s

Radionuclido 3

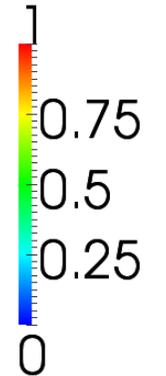


Time: 0.6 s



Time: 1.0 s

Conc (kg/m<sup>3</sup>)



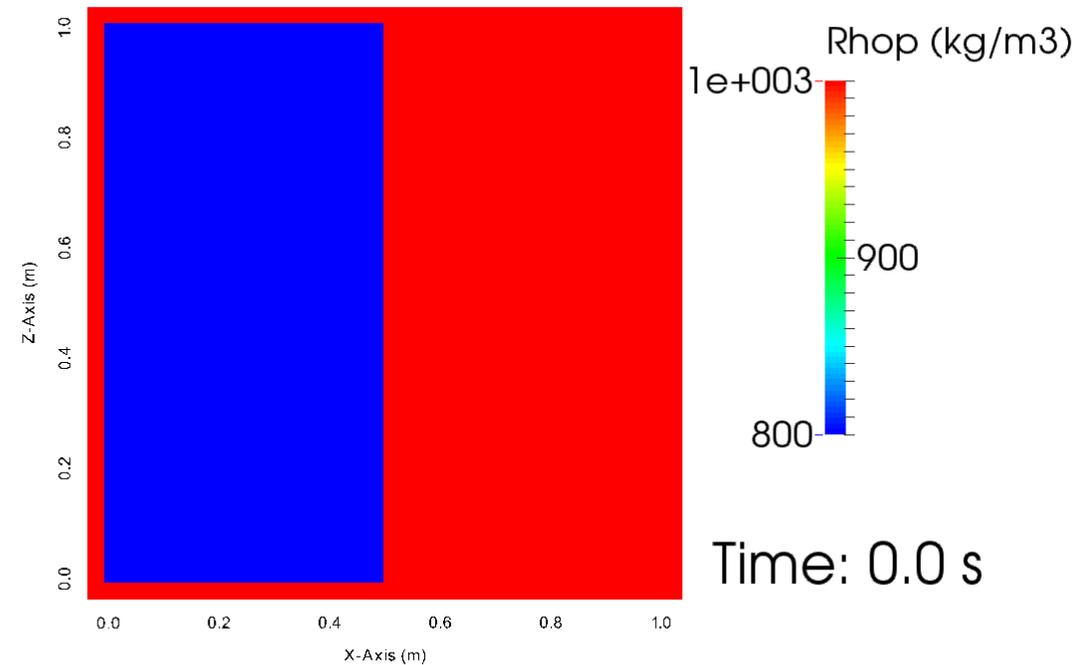
# Miscibilidad de fluidos

Utilizando el calculo de concentración se realiza el cambio de densidad de referencia y se obtiene miscibilidad en los fluidos:

$$\rho_0 = \rho_0 \left( \frac{C}{C_0} \right)$$

$$m = m \left( \frac{C}{C_0} \right)$$

En este ejemplo  $dp = 0.01$ , viscosidad artificial  $\nu = 0.05$ , un coeficiente de difusión  $D = 0.01$  y la aceleración de gravedad  $g = -9.8 \frac{m}{s^2}$ .



# Algoritmo Shifting

El algoritmo shifting se utiliza para mantener una distribución uniforme de partículas, principalmente en altas resoluciones. Este algoritmo es de gran ayuda en la simulación de medios porosos debido a los vacíos que se forman al interactuar las partículas fluidas con partículas contorno, (Skillen et al., 2013).

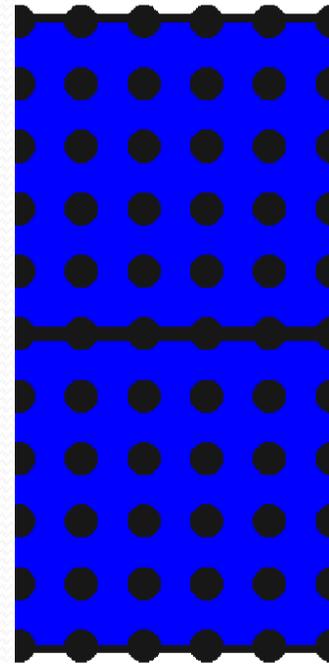
$$\nabla V_i = \frac{m_i}{\rho_i} \nabla_i W_j(r_i)$$

$$\delta r_i = -Ah u_i \Delta t \nabla V_i$$

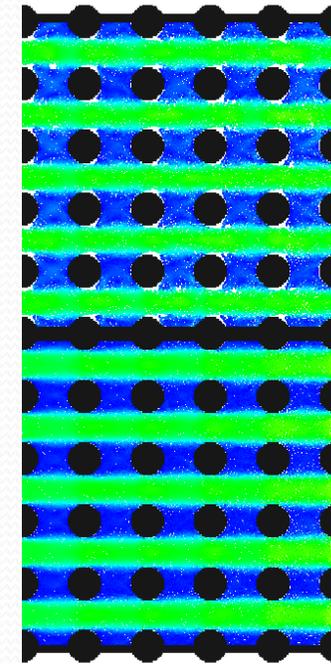
$$r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta t \left( \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2} \right) + \delta r_i$$

Sin Shifting

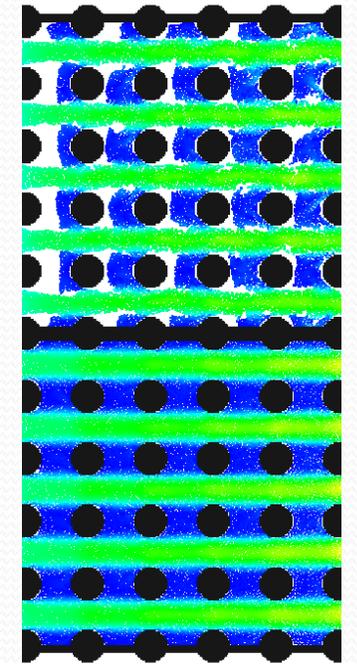
Con Shifting



Time: 0.00 s



Time: 0.25 s



Time: 0.50 s



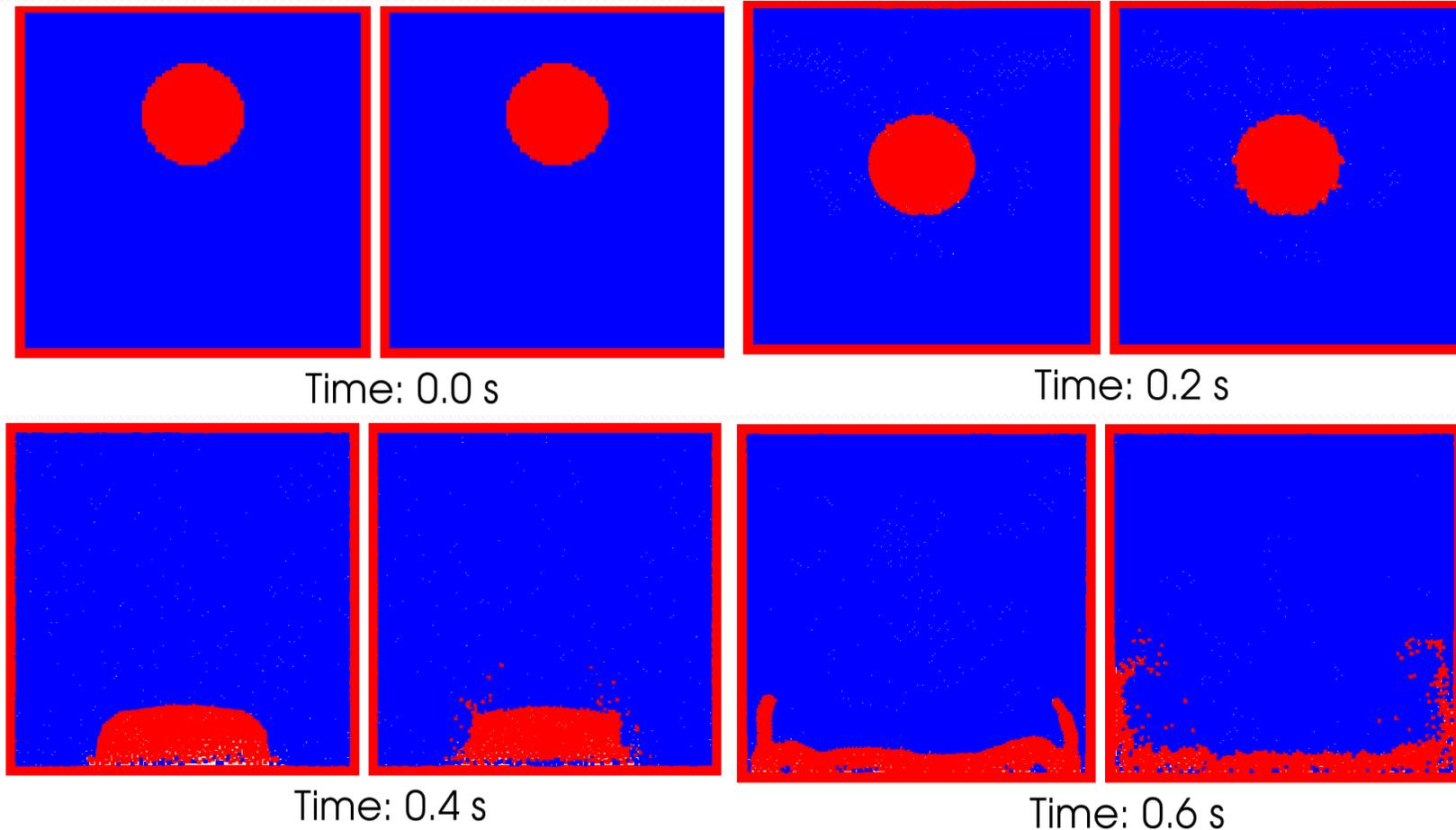
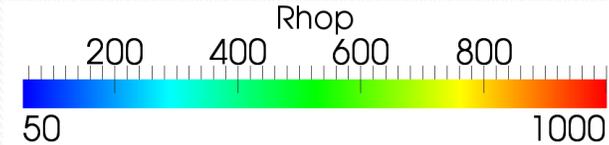
# Longitud de suavizado variable

Cuando la diferencia de densidades es alta, el uso de longitud de suavizado variable ( $h_a$ ) mejora la estabilidad de la simulación así como la definición de la interface. (Sigalotti et al, 2006).

$$h_a = \lambda_a h_0$$

$$\lambda_a = k \left( \frac{\tilde{\rho}_a}{\bar{g}} \right)^{-\epsilon} \quad k = 1$$

$$\log \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \log \tilde{\rho}_b \quad \epsilon = 0.5$$





# Validaciones

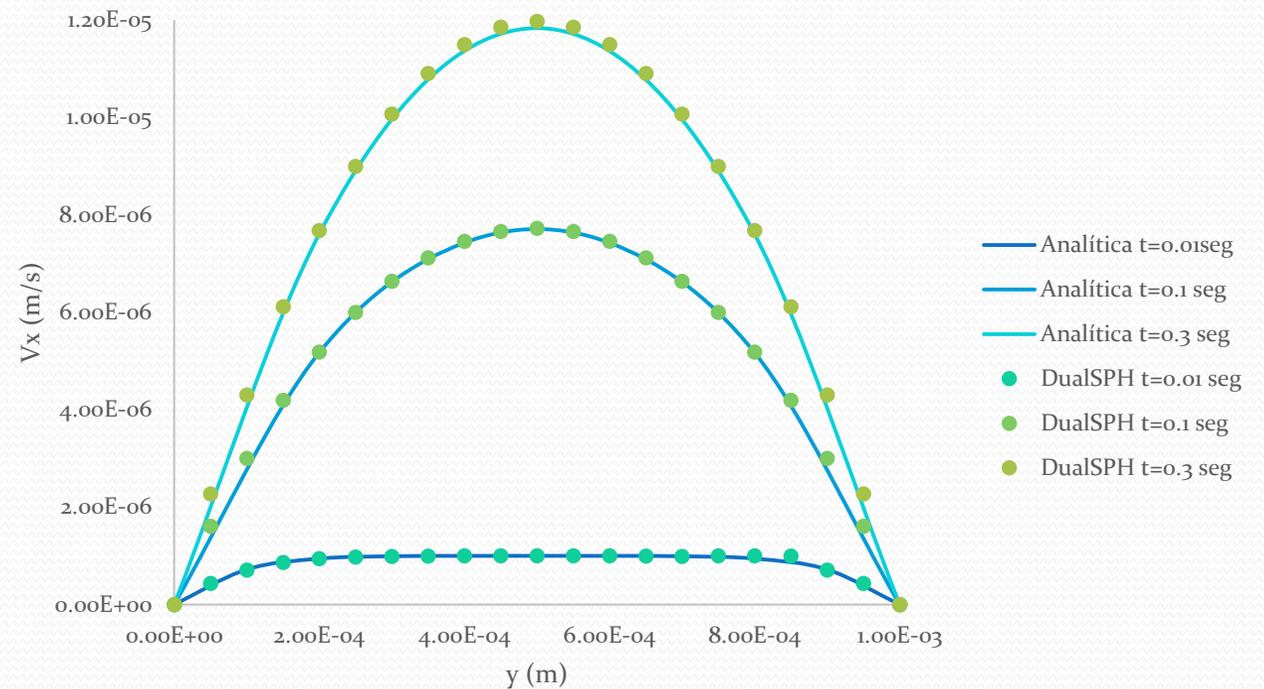
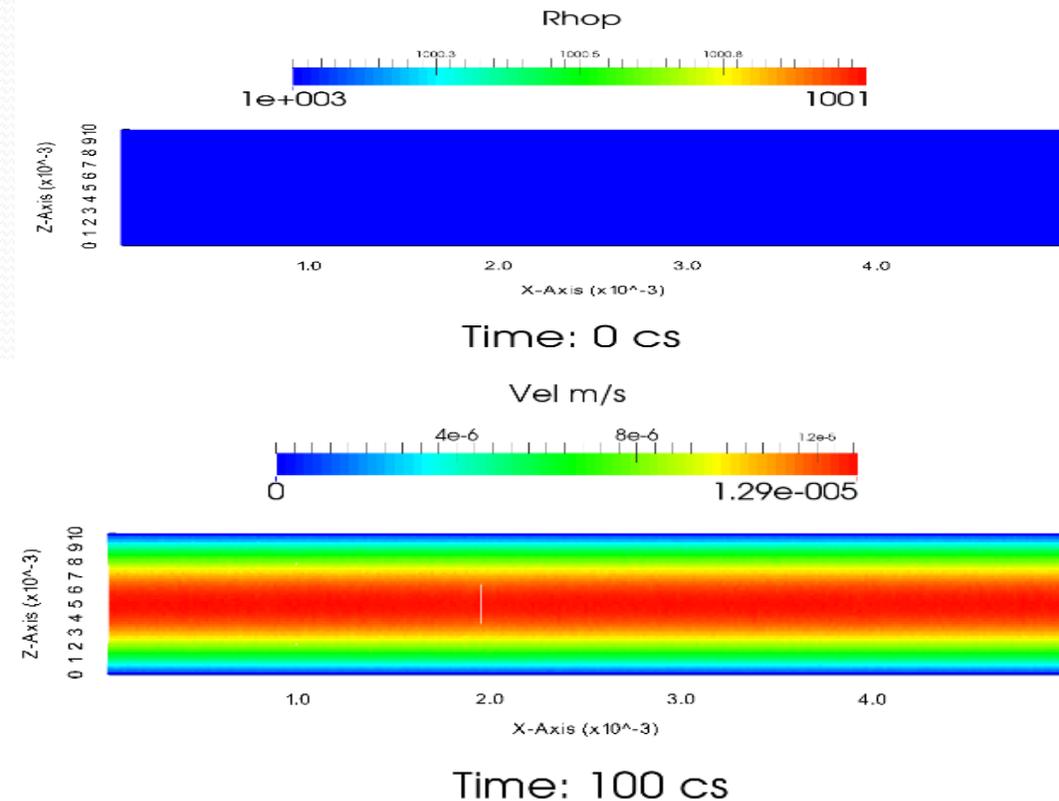
# Flujo de Poiseuille

Ecuación de momento

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_b m_b \left( \frac{4v_{rab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)(r_{ab}^2 + \eta^2)} \right) v_{ab}$$

El test considera el flujo provocado por un gradiente de presión entre dos platos fijos paralelos e infinitos. Se colocaron 12500 partículas con distancia inicial entre ellas de  $dp = 2 \times 10^{-5} m$ ,  $\rho = 1000 kg/m^3$ , viscosidad laminar de  $\nu = 1 \times 10^{-6} m^2/s$ ,  $a = 1 \times 10^{-4} m/s^2$ , velocidad artificial del sonido de  $C_s = 1 m/s$ . La solución analítica se obtuvo utilizando la expresión reportada por Morris et al 1997.

$$v_x(y, t) = \frac{F}{2\nu} y(y - L) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4FL^2}{\nu\pi^3(2n+1)^3} \sin\left[\frac{\pi y}{L}(2n+1)\right] \exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2\nu}{L^2}t\right]$$



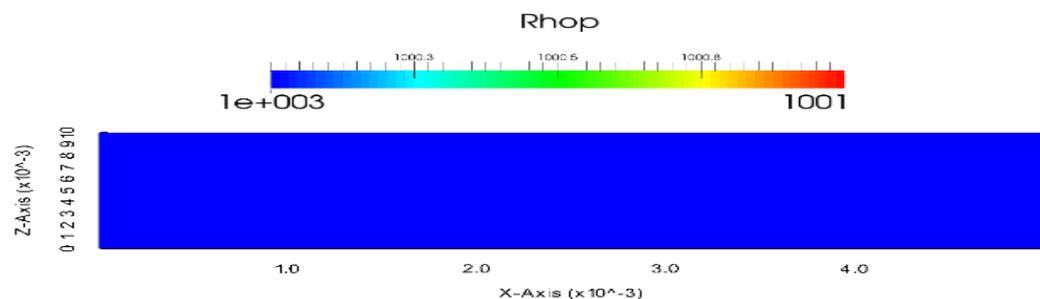
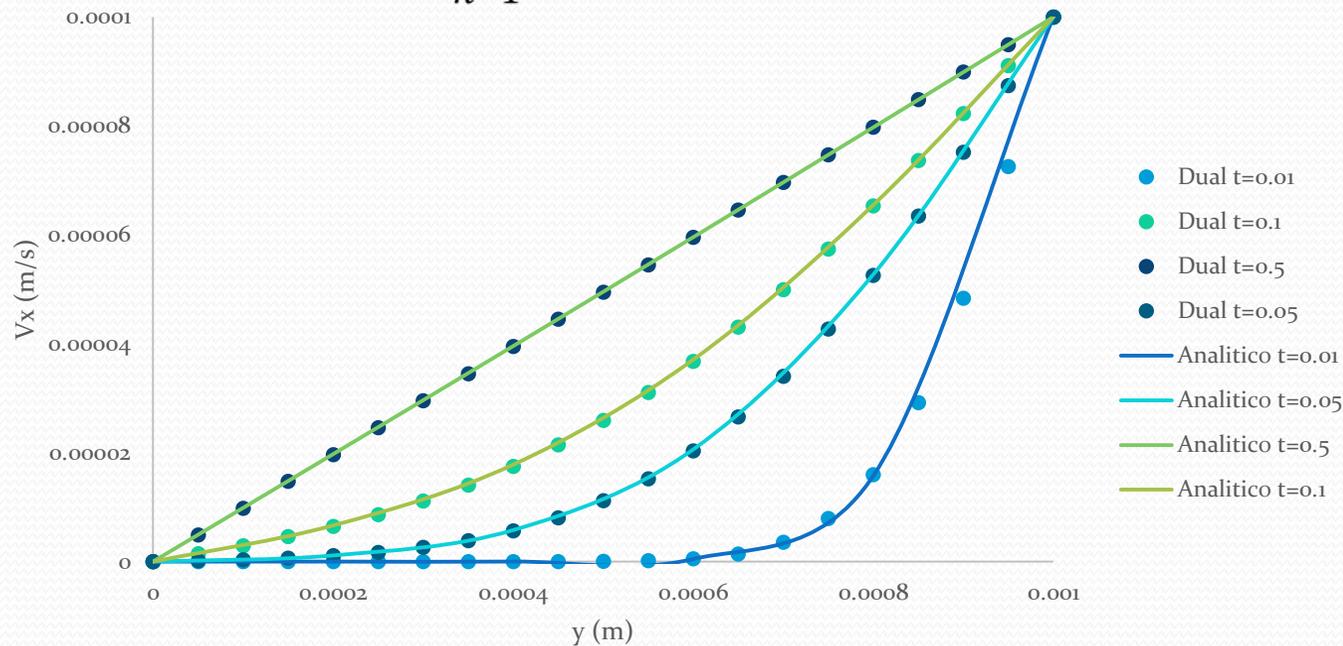
# Flujo de Couette

Ecuación de momento

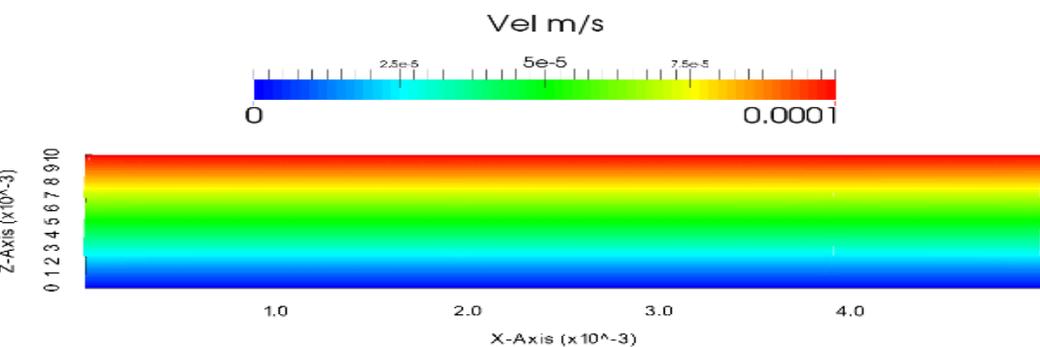
$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_b m_b \left( \frac{4v_0 r_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)(r_{ab}^2 + \eta^2)} \right) v_{ab}$$

El test considera el flujo entre dos platos paralelos infinitos provocado por el movimiento del plato superior con velocidad constante. Se colocaron 12500 partículas con distancia inicial entre ellas de  $dp = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , viscosidad laminar de  $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $v_x = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$ , velocidad artificial del sonido de  $C_s = 1 \text{ m/s}$ . La solución analítica se obtuvo utilizando la expresión reportada por Morris et al 1997.

$$v_x(y, t) = \frac{V_0}{L} y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \exp\left(-\nu \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$



Time: 0 cs



Time: 50 cs

# Flujo de fluidos inmiscibles adyacentes

Ecuación de momento

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_b m_b \left( \frac{4vr_{ab} \cdot \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b)(r_{ab}^2 + \eta^2)} \right) v_{ab}$$

Ecuación de estado con

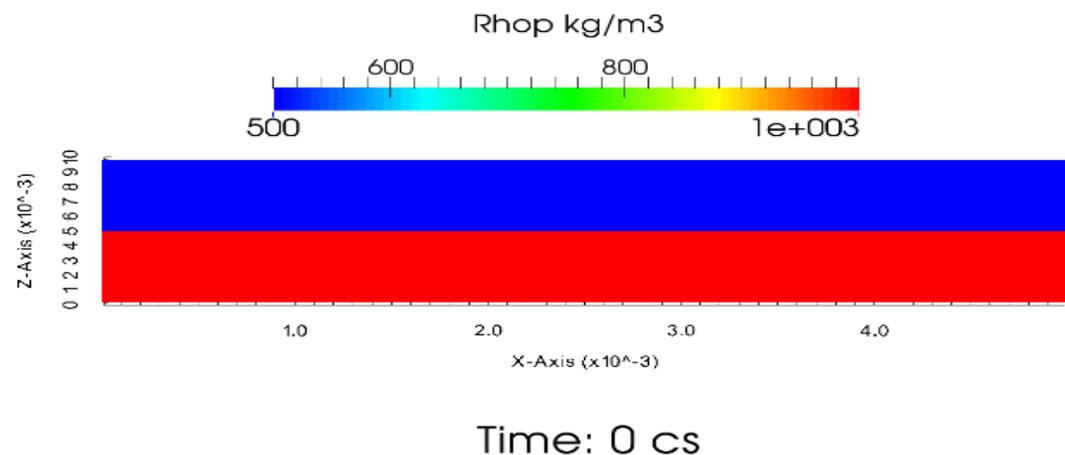
diferente densidad de referencia

$$P = B_X * \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{0X}} \right)^{\gamma_X} - 1 \right] \quad P = B_Y * \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{0Y}} \right)^{\gamma_Y} - 1 \right]$$

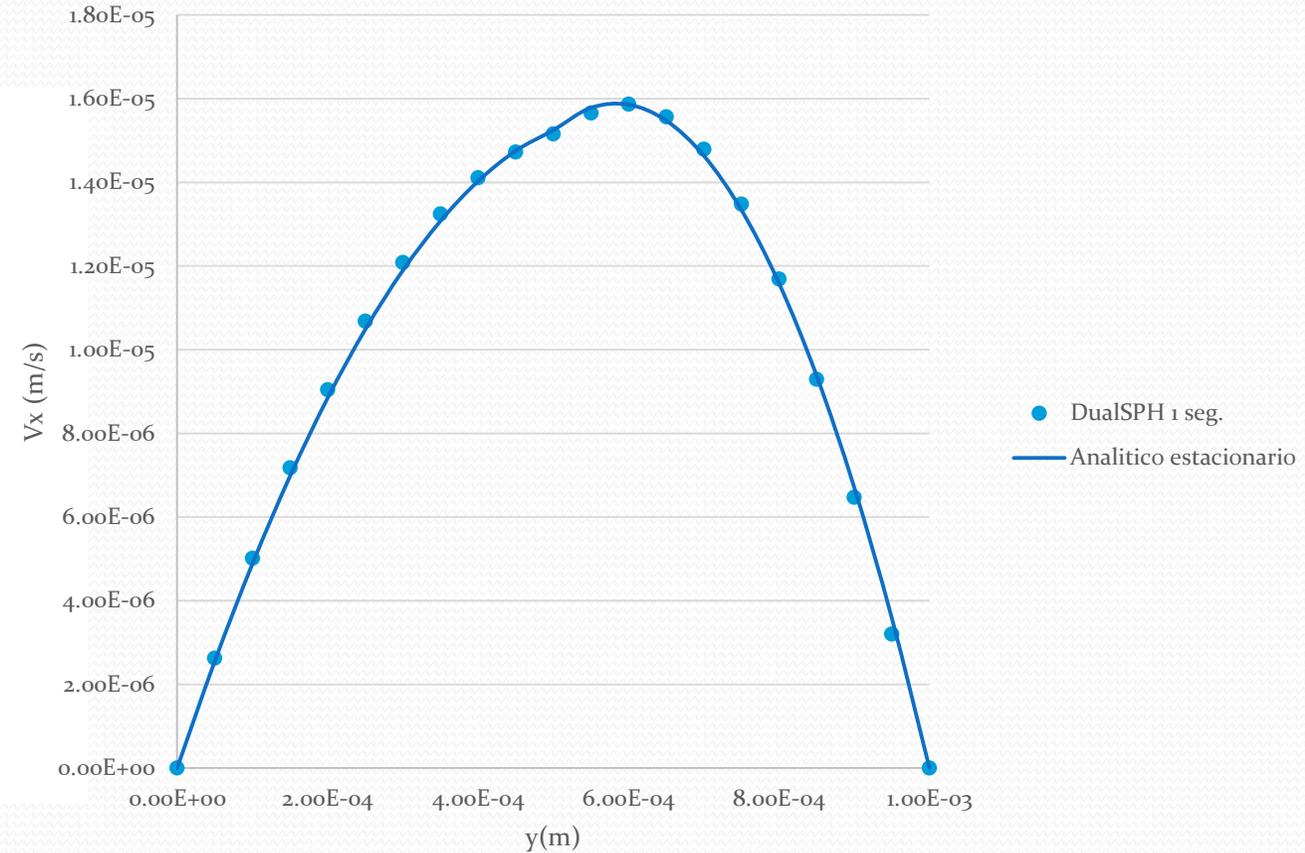
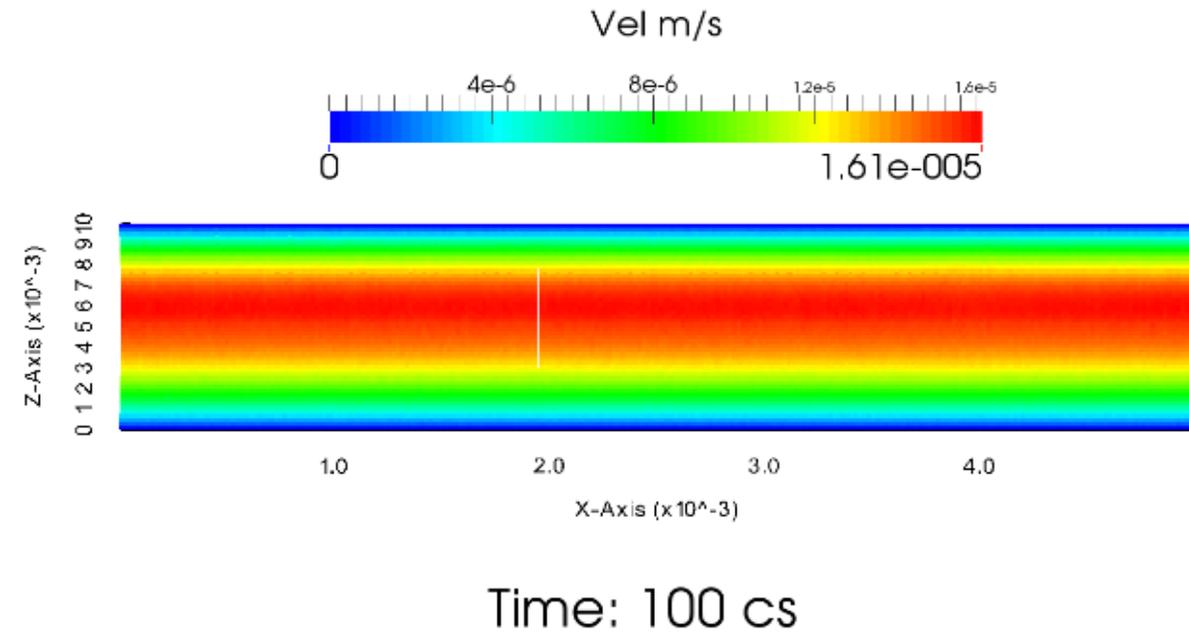
Similar al flujo de Poiseuille y utilizando dos fluidos con densidades diferentes, se colocaron 12500 partículas con  $dp = 2 \times 10^{-5} m$ ,  $\rho_1 = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ,  $\rho_2 = 500 \frac{kg}{m^3}$ , viscosidad laminar de  $\nu_1 = 2 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ ,  $\nu_2 = 1 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$  la diferencia de presión utilizada en cada caso es  $p_0 - p_L = 1.83 \times 10^{-07}$ ,  $a_x = 1 \times m/s^2$  y una velocidad artificial del sonido de  $C_s = 1 m/s$ . Los resultados numéricos se compararon con la solución analítica (Bird, 2006).

$$v_x^I = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left[ \left( \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{y}{b} \right) - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]$$

$$v_x^{II} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} \left[ \left( \frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{y}{b} \right) - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]$$



# Flujo de fluidos inmiscibles adyacentes



# Difusión

Ecuación de difusión

$$\frac{DC_i}{Dt} = \sum_b^N \frac{(m_j \rho_i D_i + m_i \rho_j D_j)}{\rho_i \rho_j} \frac{r_{ij} \cdot \nabla_i W_j(r_i)}{r_{ij}^2 + \eta^2} C_{ij}$$

Algoritmo Verlet para cambio de concentración por difusión

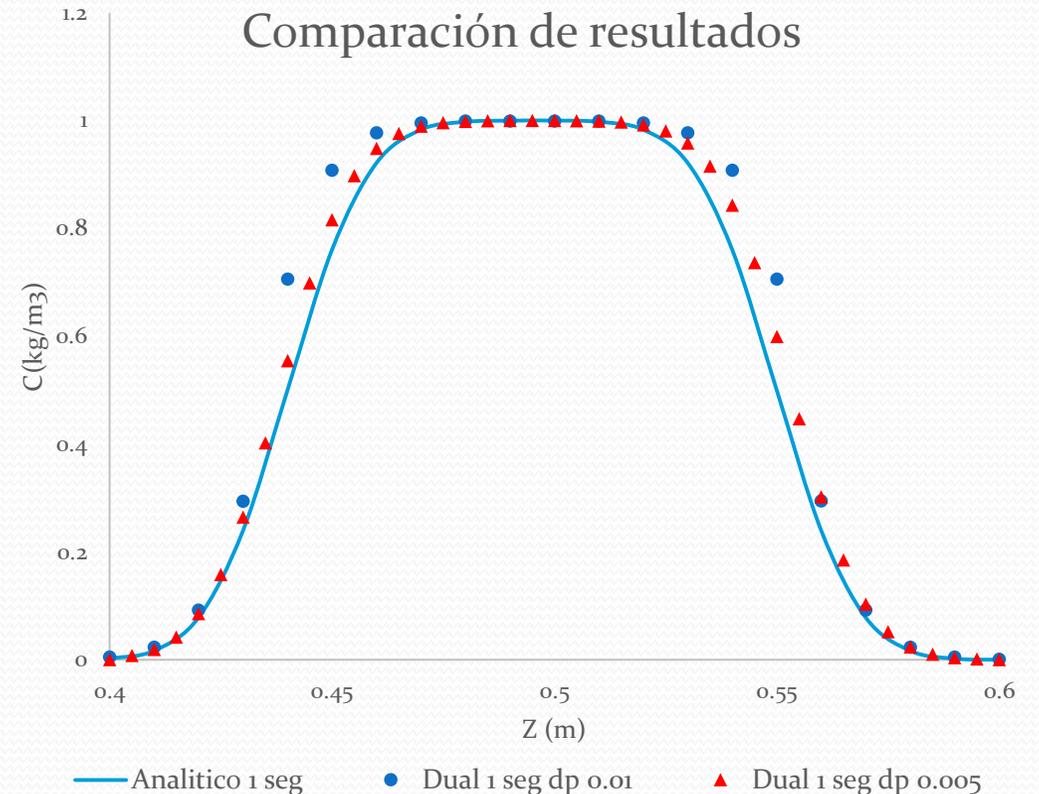
$$C_i(t + \Delta t) = \left[ C_i(t) + 0.5\Delta t \left\{ \frac{dC_i(t)}{dt} + \frac{dC_i(t + \Delta t)}{dt} \right\} \right]$$

Solución analítica del caso

$$C(z, t) = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z_1 - z}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad \text{para } z \leq z_0$$

$$C(z, t) = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z - z_2}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad \text{para } z > z_0$$

En este caso de validación se utilizó una zona de concentración inicial constante  $C = 1 \text{ kg/m}^3$  localizada en  $0.45 < Z(m) < 0.55$ ,  $Z_0 = 0.5 \text{ m}$ ,  $D = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , viscosidad laminar de  $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . El cálculo de la concentración es independiente del valor de la densidad por lo cual se considera una densidad constante durante la simulación. Los resultados numéricos fueron comparados con la solución analítica.



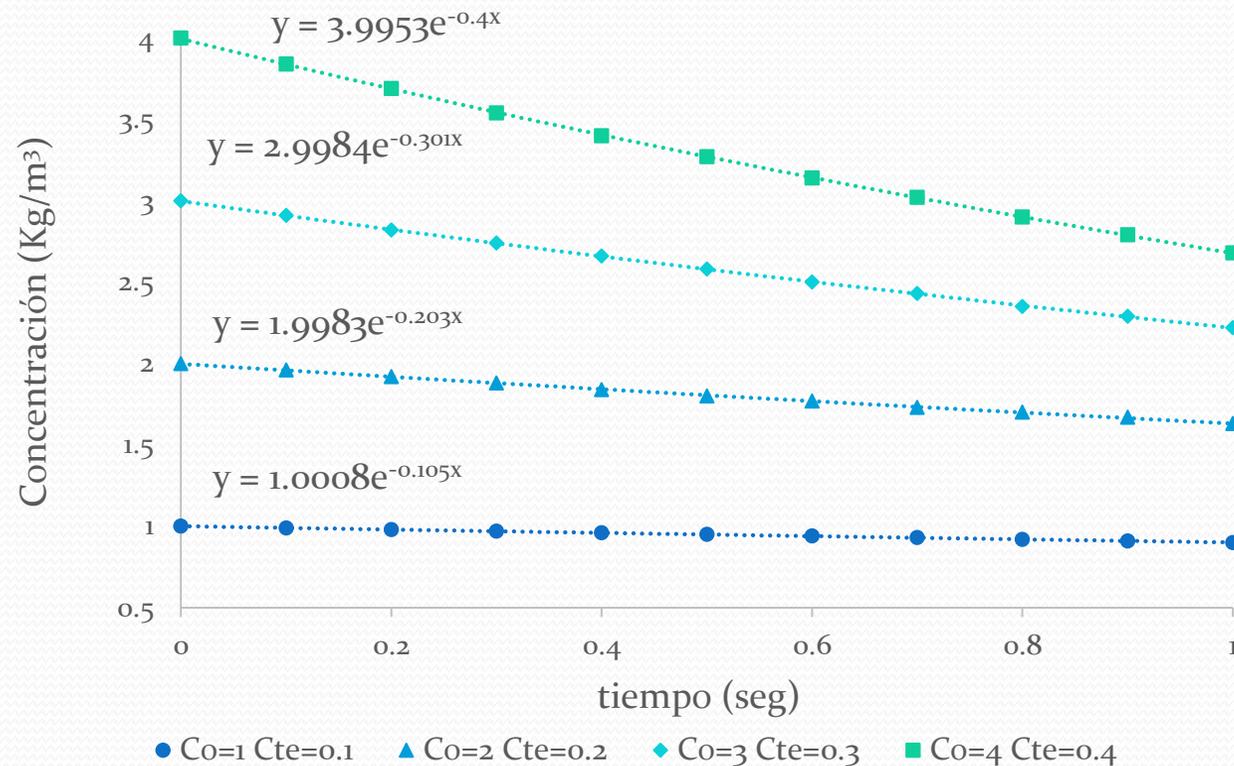
# Decaimiento y cadena de radionúclidos

Considerando la concentración de una partícula como el número de radionúclidos se puede utilizar la ecuación  $dC_i/dt = -\lambda C_i$ , cuya solución corresponde a  $C_i = C_{0i} e^{-\lambda t}$  donde  $\lambda$  es obtenido a partir del tiempo de vida media  $T_{1/2}$ .

$$T_{1/2} = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Algoritmo Verlet para cambio de concentración por difusión y decaimiento

$$C_i(t + \Delta t) = \left[ C_i(t) + 0.5\Delta t \left\{ \frac{dC_i(t)}{dt} - \lambda C_i(t) + \frac{dC_i(t + \Delta t)}{dt} - \lambda C_i(t + \Delta t) \right\} \right]$$



# Conservación de masa en fluidos miscibles

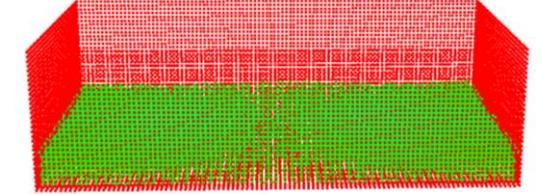
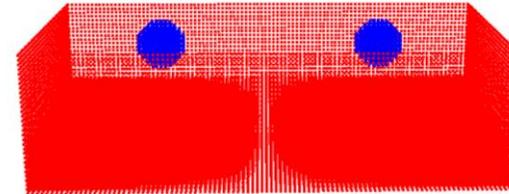
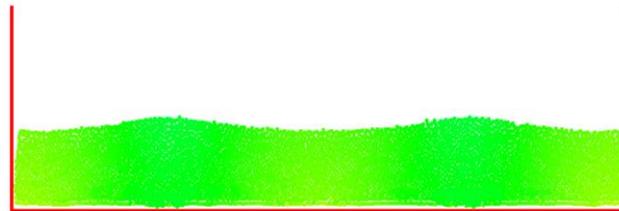
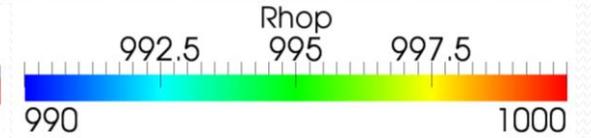
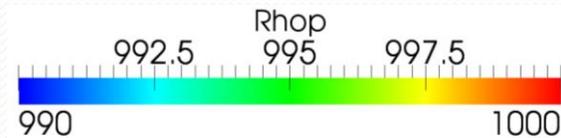
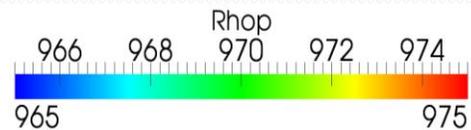
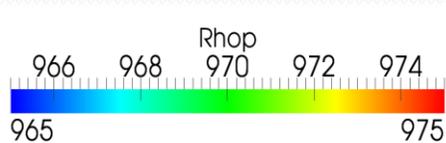
En la combinación de fluidos con diferentes densidades, la densidad final debe corresponder a la densidad y área (2D) o volumen (3D) agregado de cada fluido.

$$\rho_{2D} = \frac{A_a \rho_a + A_b \rho_b}{A_T}$$

$$\rho_{2D} = \frac{0.015708 * 800 + 0.1 * 1000}{0.015708 + 0.1} = 972.8 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{3D} = \frac{V_a \rho_a + V_b \rho_b}{V_T}$$

$$\rho_{3D} = \frac{0.0010472 * 800 + 0.05 * 1000}{0.0010472 + 0.05} = 996 \text{ kg/m}^3$$



Time: 0.0 s

Time: 3.0 s

Time: 0.0 s

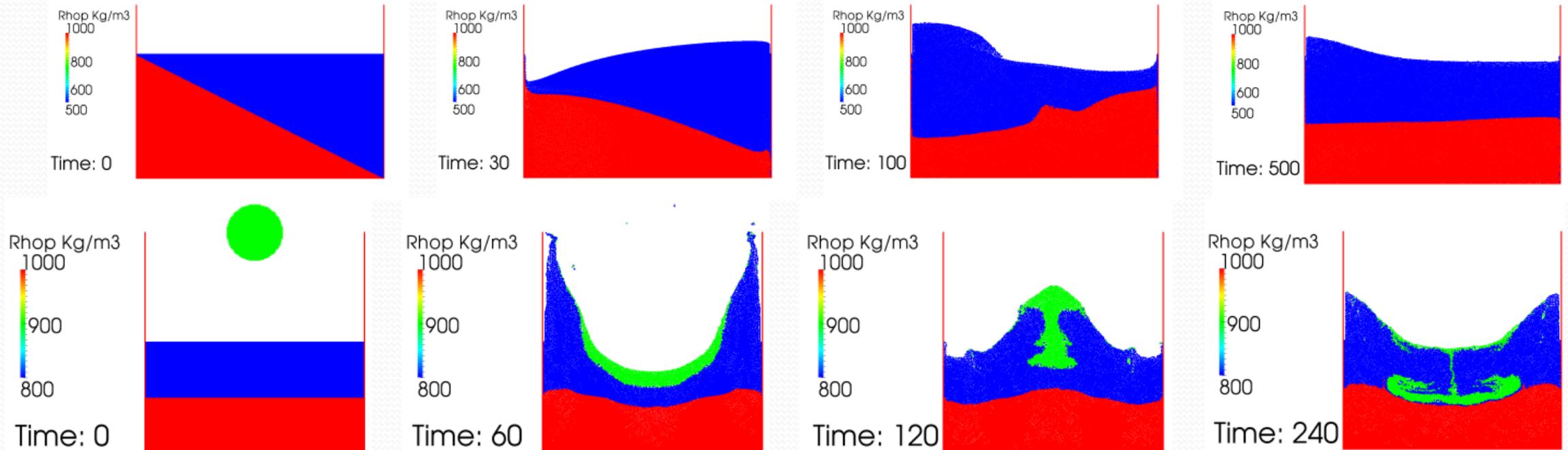
Time: 3.0 s



# CASOS DE ESTUDIO

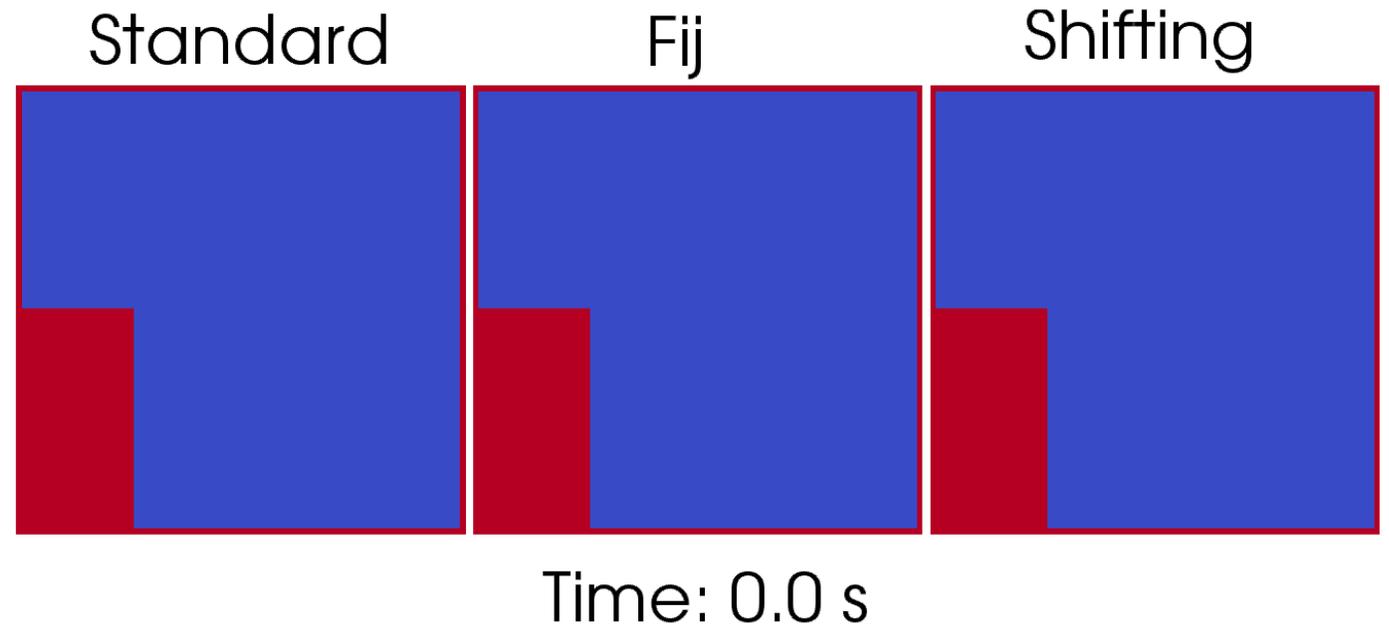
# Flujos inmiscibles por diferencia de densidad

Se realizaron varios casos en los cuales se pretende observar el comportamiento del flujo cuando existen densidades distintas. En simulaciones con diferente densidad de referencia se utilizó el mismo valor de la constante B en la ecuación de estado esto evita una repulsión entre las partículas que se encuentran en la interface. En todos los casos se utilizó un valor de  $-9.8\text{m/s}^2$  para la aceleración de gravedad. Estos casos ayudaron a verificar la estabilidad en la simulaciones.



# Dambreak con dos fases y aplicación de algoritmo shifting

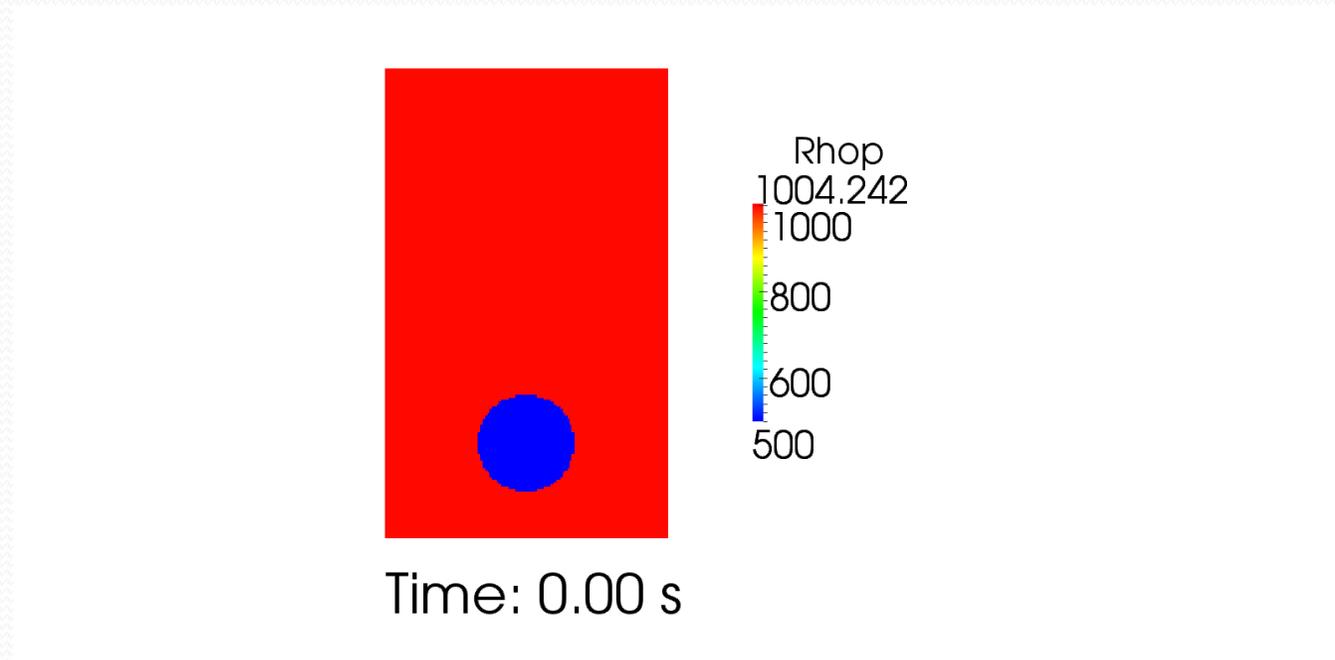
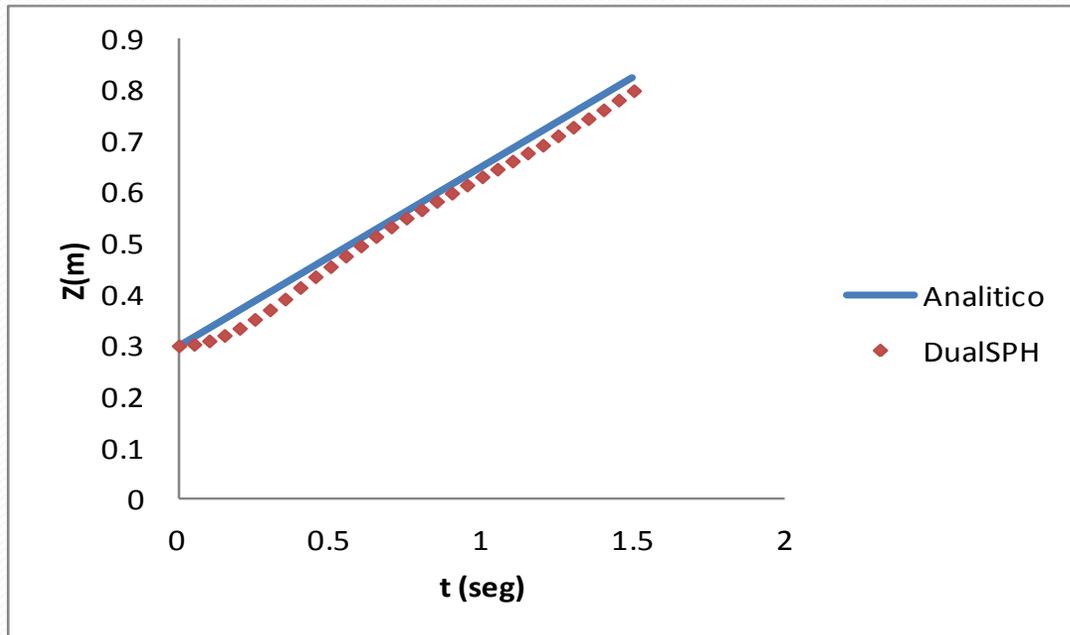
Utilizando las ecuaciones implementadas se realizó la simulación de un Dambreak con una diferencia de densidad de 1000 a 1. La velocidad del sonido utilizada para cada fase es de 50 y 450 para el fluido pesado y ligero respectivamente. El valor de la viscosidad artificial es de 0.05. Este caso se realizó agregando el algoritmo Shifting y posteriormente la relación de fuerzas de Tartakovsky entre fluidos  $s_{ii}=s_{jj}=1e^{-3}$  y  $s_{ij}=1e^{-7}$ .



# Ascenso burbuja en 2D

Se simuló el flujo de una burbuja de densidad  $500 \text{ kg/m}^3$  y radio  $0.1 \text{ m}$  inmersa en un fluido de  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Los resultados numéricos de este caso se validaron en comparación con la solución analítica reportada por (Batchelor, 1967). La validación se realiza mediante el cálculo de la posición máxima de la burbuja.

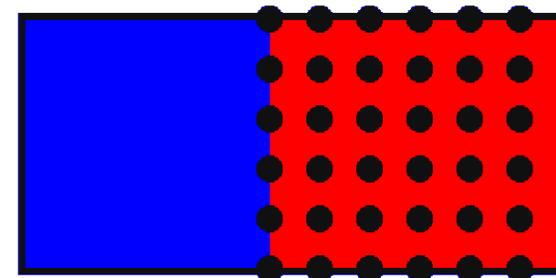
$$z(t) = z_s + \frac{1}{2} \sqrt{g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} R t}$$



# Desplazamiento de fluidos en un medio poroso y aplicación de fuerzas entre partículas.

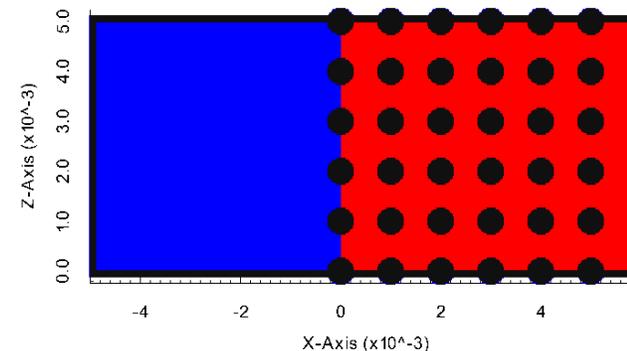
En este caso se aplicó la metodología propuesta por Tartakovsky para dar la característica de mojabilidad al fluido más denso. Las partículas en color azul y rojas corresponden a una densidad de 1000 y 800 kg/m<sup>3</sup> respectivamente. La intensidad de fuerza ( $s_{ij}$ ) entre las partículas utilizada es  $s_{ww} = s_{nn} = 1e-6$ ,  $s_{nw} = 1e-12$ ,  $s_{wb} = 5e-6$ ,  $s_{nb} = 1e-12$ , siendo w el fluido mojable y n el fluido no mojable y b la partícula contorno. La velocidad del pistón es de 5 mm/s, la porosidad es de 0.2, la velocidad artificial del sonido es 0.5 m/s y el valor de viscosidad artificial de 0.01.

Fij=0



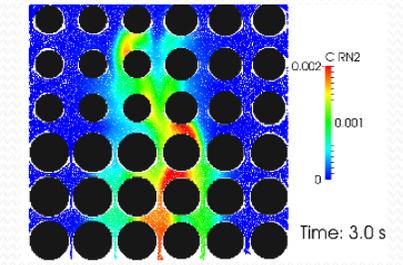
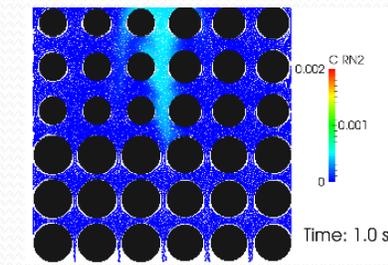
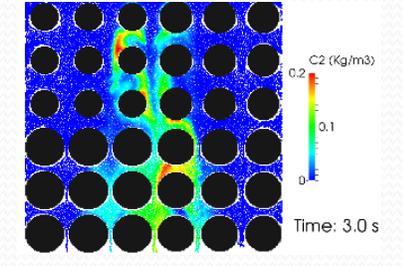
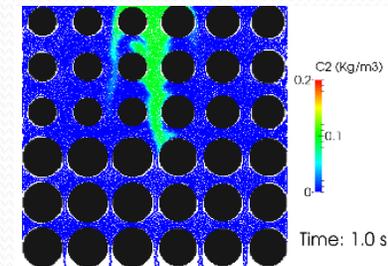
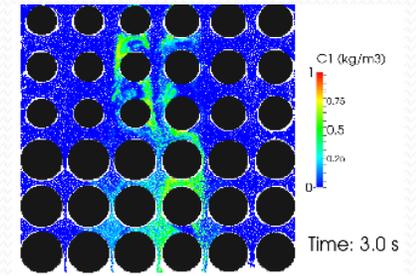
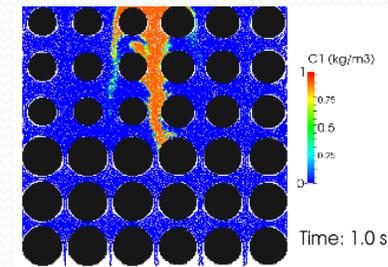
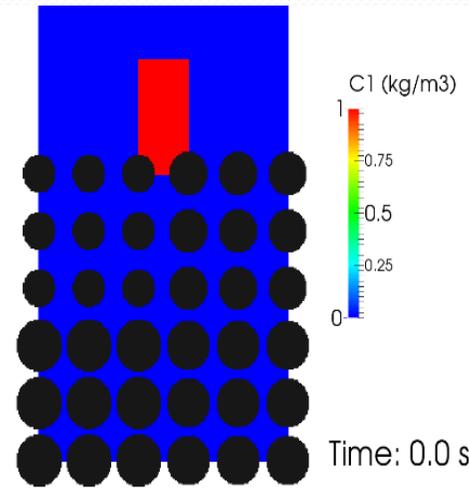
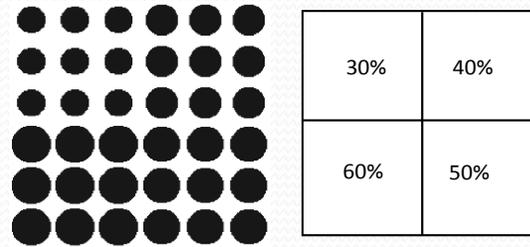
Time: 0.0 s

Fij>0



# Dispersión y decaimiento de radionúclidos en medios porosos

El medio presenta una porosidad variable de 30-60%. El contaminante tiene una concentración inicial de  $C_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ , un coeficiente de difusión de  $D = 1 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  y un decaimiento de  $\lambda = 0.1 \text{ s}^{-1}$ . Este decae en un segundo contaminante con  $C_0 = 0 \text{ kg/m}^3$ ,  $D = 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\lambda = 0.01 \text{ s}^{-1}$ , que decae finalmente en un tercer contaminante con  $C_0 = 0 \text{ kg/m}^3$ ,  $D = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $\lambda = 0.001 \text{ s}^{-1}$ . Se consideraron propiedades del fluido similares al agua para todas las partículas y un valor de viscosidad artificial de 0.01. Las partículas fluidas están afectadas por una aceleración de  $-0.01 \text{ m/s}^2$ .



# Conclusiones

- Las implementaciones realizadas pueden reproducir un flujo con diferentes densidades de manera estable y con buena exactitud.
- La ecuación de momento implementada permite una diferencia de densidad mayor con respecto a la permitida por la ecuación original.
- La ecuación de difusión implementada no requiere del término convectivo debido a que el cálculo es intrínseco en el método SPH.
- El algoritmo Verlet aplicado al cálculo de concentración y decaimiento proporciona buenos resultados para el cálculo de la concentración en una cadena de radionúclidos.
- Implementaciones como relación de fuerzas de Tartakovsky y una longitud de suavizado variable y algoritmo shifting proporcionan mejores resultados en el tratamiento de la interface entre fluidos.

# Trabajo a futuro

- Implementación de condiciones periódicas
- Relación de fuerzas de Tartakovsky con tensión superficial real
- Obtención de permeabilidad absoluta y relativa
- Análisis de Buckley Leverett para agua y aceite
- Implementación de ecuación de estado de Van der Waals
- Análisis Black Oil para agua, aire y aceite en un medio poroso.
- Validación de fluidos miscibles con comparación experimental
- Implementación de términos de reacción mono y bimoleculares en la ecuación de concentración y validación con caso experimental.

# Referencias

- Alexandre M. Tartakovsky, Paul Meakin, Timothy D. Scheibe, Rogene M. Eichler West, Simulations of reactive transport and precipitation with smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 222 (2007) 654–672.
- Alex Skillen, Steven Lind, Peter K. Stansby, Benedict D. Rogers, Incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) with reduced temporal noise and generalised Fickian smoothing applied to body–water slam and efficient wave–body interaction, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 265 (2013) 163–173.
- Batchelor G.K.. An introduction to fluid dynamics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1-615, 1967.
- Bird R B, Stewart W E, Lightfoot E N, Fenómenos de transporte, Editorial Limusa Wiley, 2a edición 2006.
- Colagrossi A, Landrini M, 2003, Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal of Computational Physics* 191 448-475.
- Morris J P, Fox P J, Zhu Y, Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *Journal of computational physics*, 1997, 136:214-226, doi:10.1006/jcph.1997.5776.
- Gómez-Gesteira M, Rogers B D, Crespo AJC, Dalrymple R A, Narayanaswamy M and Domínguez J M. 2012a. SPHysics - development of a free-surface fluid solver- Part 1: Theory and Formulations. *Computers & Geosciences*, 48, 289-299. doi:10.1016/j.cageo.2012.02.029.
- Sigalotti D G L, López H, Donoso A, Sira E, Klapp J, A shock-capturing SPH scheme based on adaptive kernel estimation, *Journal of Computational Physics* 212 (2006) 124–149.



UNIVERSIDAD  
DE GUANAJUATO

**Gracias**