Tema 4

Las ecuaciones de movimiento

4.1 Introducción

En oceanografía se usan los principios de la mecánica de fluidos, asumiendo el caso particular de fluidos newtonianos. Aquí, se tratará de dar una visión somera de las ecuaciones que rigen el movimiento del agua del mar, las cuales no son más que una particularización de principios más generales tales como la conservación de la masa y la conservación del momento. Para un conocimiento más profundo se recomienda la lectura de libros más específicos tales como Pedlosky (1987) o Kundu & Cohen (2008). Asimismo, existen otras leyes de conservación que no se considerarán en el presente capítulo, tales como la conservación de la energía, la cual es de especial interés para el análisis de balances de calor, así como la conservación del momento angular, la cual está relacionada con la conservación de la vorticidad.

Para la conservación del momento, se deberán tener en cuenta las diferentes fuerzas que actúan sobre un fluido como el agua, las cuales se mencionarán brevemente en este apartado y se desarrollarán en apartados posteriores.

La fuerza dominante es la *gravedad*. A partir de la gravedad se derivan diferentes términos en la conservación del momento, por un lado la aceleración de la gravedad, ***g***, de la que todos tenemos un cierto concepto intuitivo y que deriva de la fuerza de atracción entre diferentes cuerpos que poseen masa. Por otro lado, la gravedad junto a la densidad del fluido son responsables de la aparición de gradientes de presión que dan lugar a fuerzas que generan el movimiento del fluido. Finalmente, no solo la Tierra tiene un efecto gravitatorio sobre el agua, además, tanto la luna como el Sol, ejercen una fuerza gravitatoria que es responsable de las mareas.

Las llamadas fuerzas de *fricción* se deben a los distintos desplazamientos que sufren las diferentes parcelas del fluido que están en contacto. Así, si una parcela de fluido se mueve a mayor velocidad que una parcela adyacente, la más rápida tenderá a decelerarse y la más lenta a acelerarse. Estas fuerzas de fricción no actúan solamente entre diferentes parcelas del mismo fluido, sino también entre parcelas de diferentes fluidos. Así, el aire que sopla en las proximidades de la superficie del mar tiende a generar el desplazamiento de las capas superficiales del agua, dando lugar a corrientes.

Finalmente, se tienen las llamadas *pseudo-fuerzas* tales como la *fuerza de Coriolis*. Realmente, esta fuerza, la cual se mencionó en el capítulo 1, se debe a que la Tierra es un sistema de coordenadas en rotación. El llamado efecto Coriolis es la aparente desviación de un objeto en movimiento cuando se observa desde un sistema de referencia no inercial. Sobre la superficie terrestre el movimiento aparente es hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur. Observado desde el espacio, este movimiento aparente no se produce. Por otro lado, también debe considerarse la fuerza centrífuga (o centrípeta), la cual está ligada a que la Tierra gira, por lo cual aparece una aceleración normal.

4.2 Un poco de matemáticas

Tal como se acaba de comentar, se pretende dar una descripción somera del comportamiento del agua del mar bajo la influencia de diferentes fuerzas. Para ello, existen diferentes aproximaciones, desde la eminentemente cualitativa y descriptiva como la realizada por la Open University (2002) hasta la más formal de Pedlosky (1987) o Kundu & Cohen (2008), pasando por una opción intermedia como Pond & Pickard (1989). Aquí nos decantaremos por esta última opción. Para ello, es necesario mencionar una serie de conceptos matemáticos que serán de ayuda para el resto del capítulo.

El primer concepto es el de derivada total, también llamada derivada material. Consideremos una parcela de fluido como un pequeño volumen de fluido en el que se analizan los valores de sus propiedades físicas (Figura 4.1). Queremos ver la variación de una cierta propiedad F, donde los subíndices *i* y *o* se refieren a la entrada y salida respectivamente.

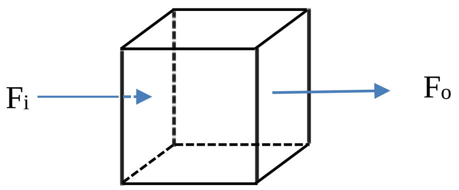

Figura 4.1. Flujo de una cierta variable (F) a la entrada y salida del volumen de control.

$$F_o = F_i + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}}\delta\mathrm{t} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\delta\mathrm{x} \qquad (4.1)$$

Donde se ha asumido que la única dirección espacial de interés es la dirección x. Si se quiere saber el cambio experimentado por la variable F en ese volumen

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{Dt}} = \frac{F_o - F_i}{\delta\mathrm{t}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\delta\mathrm{x}}{\delta\mathrm{t}} \qquad (4.2)$$

teniendo en cuenta que $\delta\mathrm{x}/\delta\mathrm{t}$ es la componente x de la velocidad (u), la ecuación 4.2 se convierte en

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{Dt}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} \tag{4.3}$$

Esta expresión puede generalizarse en 3 dimensiones como

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{Dt}} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{z}} \tag{4.4}$$

En general, los medios fluidos pueden describirse de forma *lagrangiana* y *euleriana*. En el caso de una descripción lagrangiana se sigue el movimiento de diferentes partículas, es decir, debe mantenerse una variable (tiempo) y una etiqueta para cada partícula. Por otro lado, en una descripción euleriana, se analiza lo que pasa en un cierto punto del espacio. Así, la variación de una cierta propiedad de una particula en el formalismo lagrangiano es simplemente el término que depende de la derivada parcial $\partial \mathrm{F}/\partial \mathrm{t}$, el cual representa la variación local de esa propiedad. Por el contrario, en una descripción euleriana deben tenerse en cuenta el resto de los términos de la forma $u_i\, \partial \mathrm{F}/\partial x_i$ que constituyen la llamada derivada advectiva.

Otro concepto interesante es el de las fuerzas ficticias o pseudo-fuerzas. Debe tenerse en cuenta que las leyes de Newton son válidas en un sistema de referencia inercial (aquel que está fijo o se mueve con velocidad constante). Sin embargo, la Tierra rota y se traslada, por lo que las ecuaciones de Newton no pueden aplicarse directamente. En primer lugar, el movimiento de traslación no se considera, simplemente se tiene en cuenta el movimiento de rotación y se transforman las Leyes de Newton para describir el sistema físico. Si se asume un sistema de referencia inercial *S* caracterizado por tres vectores unitarios (***I***, ***J***, ***K***), y un sistema de referencia *S'* caracterizado por vectores unitarios (***I'***, ***J'***, ***K'***), que coincide con el anterior en un cierto instante (por ejemplo en t=0), pero que rota con velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{K}$. Dado un vector **B** de componentes (B_x, B_y, B_z) en el sistema de referencia S y componentes (B_x', B_y', B_z') en el sistema de referencia S'. Este vector puede expresarse como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(t) &= B_x(t)\,\boldsymbol{I} + B_y(t)\,\boldsymbol{J} + B_z(t)\,\boldsymbol{K} \\ &= B_x'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{I}' + B_y'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{J}' + B_z'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{K}' \end{aligned} \tag{4.5}$$

debe tenerse en cuenta que los vectores unitarios en el sistema S son fijos, pero en el sistema S' varían en el tiempo (rotan).

$$\boldsymbol{I}' = \cos(\Omega t)\,\boldsymbol{I} + \sin(\Omega t)\,\boldsymbol{J} \tag{4.6a}$$

$$\boldsymbol{J}' = -\sin(\Omega t)\,\boldsymbol{I} + \cos(\Omega t)\,\boldsymbol{J} \tag{4.6b}$$

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K} \tag{4.6c}$$

Si se derivan estos vectores con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{I}}' = \Omega\,\left(-\sin(\Omega t)\,\boldsymbol{I} + \cos(\Omega t)\,\boldsymbol{J}\right) = \Omega\,\boldsymbol{J}' \tag{4.7a}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}' = -\Omega\,\left(\cos(\Omega t)\,\boldsymbol{I} + \sin(\Omega t)\,\boldsymbol{J}\right) = -\Omega\,\boldsymbol{I}' \tag{4.7b}$$

$$\dot{\boldsymbol{K}}' = 0 \tag{4.7c}$$

Si se calcula la derivada del vector $\boldsymbol{B}$ con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}_x(t)\,\boldsymbol{I} + \dot{B}_y(t)\,\boldsymbol{J} + \dot{B}_y(t)\;\;\boldsymbol{K} \tag{4.8a}$$

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}_x'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{I}' + \;\dot{B}_y'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{J}' + \dot{B}_z'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{K}' + B_x'\,(\mathrm{t})\,\dot{\boldsymbol{I}}' + \;B_y'\,(\mathrm{t})\,\dot{\boldsymbol{J}}' + B_z'\,(\mathrm{t})\,\dot{\boldsymbol{K}}' \tag{4.8b}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 4.7

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{B}_x'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{I}' + \;\dot{B}_y'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{J}' + \dot{B}_z'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{K}' + \Omega\,(B_x'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{J}' - \;B_y'\,(\mathrm{t})\,\boldsymbol{I}') \tag{4.9}$$

Puede comprobarse trivialmente que el último término corresponde al producto vectorial $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}$. En definitiva, sustituyendo este producto vectorial en 4.9 e igualando con 4.8a se obtiene

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{B}}{\mathrm{Dt}}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{B}}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} \tag{4.10}$$

4.3 Conservación del momento

La ecuación de movimiento de un fluido geofísico se deriva a partir de la ley de conservación del momento. Se trata simplemente de la segunda ley de Newton, según la cual el cambio de momento de una masa de fluido se debe al conjunto de todas las fuerzas aplicadas

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{m}\mathbf{v})}{\mathrm{Dt}} = \mathbf{F} \tag{4.11}$$

Donde m es la masa, **v** la velocidad y **F** la fuerza. Estamos implícitamente asumiendo una descripción euleriana. Si, además, asumimos que la masa no varía, se puede calcular la variación de la velocidad a partir de la fuerza por unidad de masa **f**.

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{Dt}} = \mathbf{f} \tag{4.12}$$

A continuación se describirán las fuerzas que son relevantes para el movimiento del fluido.

4.4.1 El término de presión

Dado un cubo de fluido tal como se muestra en la Figura 4.2, si se considera la fuerza en dirección x.

$$\delta F_x \;= \mathrm{p}\;\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z} - (\mathrm{p} + \delta\mathrm{p})\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z} = \;-\delta\mathrm{p}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z} \tag{4.13}$$

y siendo

$$\delta\mathrm{p} = \;\frac{\partial\mathrm{p}}{\partial\mathrm{x}}\delta\mathrm{x}$$

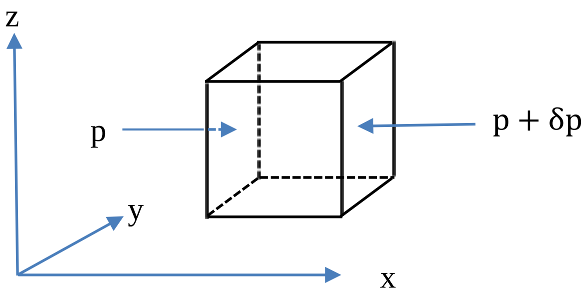

Figura 4.2. Fuerzas sobre un volumen de control (δV). Los lados del cubo tienen dimensiones (δx, δy, δz).

entonces

$$\delta F_x = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}\delta\mathrm{x}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z} = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}\delta\mathrm{V} \qquad (4.14)$$

Si se divide por la masa del fluido se obtiene la aceleración en dirección x

$$a_x = \frac{\delta F_x}{\delta \mathrm{m}} = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta \mathrm{m}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \qquad (4.15)$$

Obviamente, la derivación sería equivalente para las direcciones y, z. Debe notarse el signo menos, así, si la presión fuese mayor sobre la cara derecha que sobre la izquierda, el movimiento se produciría hacia la izquierda. El movimiento tiene lugar en la dirección opuesta al gradiente de presión.

4.3.2 Las fuerzas ficticias

Aquí se derivarán tanto el término de Coriolis como la aceleración centrífuga. Tal como se comentó anteriormente, ambos términos se deben a la transformación de las leyes de Newton a un sistema de referencia no inercial. Si se considera la ecuación 4.10 como punto de partida y se aplica a la posición

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{r}}{\mathrm{Dt}}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{r}}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \qquad (4.16)$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular de rotación de la tierra ($\Omega = 7.291 \times 10^{-5}$ radianes s^{-1}). Así, se obtiene

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \qquad (4.17)$$

si se aplica 4.10 a la velocidad

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}_s}{\mathrm{Dt}}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}_s}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_s \qquad (4.18)$$

y se sustituye la expresión de $\mathbf{v}_s$ a partir de la ecuación 4.17

$$\left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}_s}{\mathrm{Dt}}\right)_S = \left(\frac{\mathrm{D}(\mathbf{v}_{S'} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{v}_{S'} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})$$

$$= \left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}_{S'}}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \left(\frac{\mathrm{D}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$$= \left(\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}_{S'}}{\mathrm{Dt}}\right)_{S'} + 2\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{S'} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$$

Así, la aceleración en un sistema de referencia en rotación se puede escribir en función de la aceleración en un sistema de referencia inercial.

$$\mathbf{a}_{S'} = \mathbf{a}_S - 2\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_s - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \qquad (4.19)$$

Si el término $-2\,\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_s$ se multiplica por la masa se obtiene la fuerza (ficticia) de Coriolis, mientras que del término $-\,\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ se obtiene la fuerza centrífuga. Debe destacarse que la fuerza de Coriolis solo aparece si la masa se mueve en el sistema *S'*. Por otro lado, la fuerza centrífuga está siempre presente, independiente del estado de movimiento. Normalmente, este término se suma al gravitatorio que veremos a continuación.

4.3.3 El término gravitatorio

Dado cualquier cuerpo de masa m, este cuerpo sufre una fuerza de atracción por parte de la Tierra dada por

$$\mathbf{F}_g = G\,\frac{M_T m}{R_T^2}\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

donde G=6.67384×10^{-11} $m^3 s^{-2} kg^{-1}$ es la constante de gravitación universal, M_T la masa de la Tierra y R_T la distancia desde el centro de la tierra al cuerpo. El vector unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$ tiene la dirección de la línea que conecta el centro de la Tierra y el objeto y la dirección apunta hacia el centro de la Tierra, de tal forma que la fuerza es atractiva. Tal como se ha hecho con el resto de las fuerzas, se considerará la fuerza por unidad de masa

$$\boldsymbol{g}_f = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = G\,\frac{M_T}{R_T^2}\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

Así, añadiendo el término de aceleración centrífuga,

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_f - \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \qquad (4.20)$$

Debe tenerse en cuenta que con esta corrección la gravedad ya no apunta hacia el centro de la Tierra. La superficie del océano en reposo es perpendicular a $\boldsymbol{g}$ y esa superficie es un elipsoide de rotación en lugar de una superficie esférica. De cualquier manera, a efectos prácticos, el valor máximo del término centrífugo es del orden de un 3% del valor de $\boldsymbol{g}_f$, por lo que en general se desprecia este término de corrección. Además, la Tierra tampoco es una esfera perfecta, ya que está achatada en los polos, por lo que el valor de $\boldsymbol{g}_f$ no es exactamente constante. A efectos prácticos, se tomará g = 9.8 m s^{-2}.

4.3.4 Las fuerzas de fricción

La fricción es la tendencia de un fluido a resistirse al arrastre. En una primera aproximación se considerara la viscosidad de origen molecular. Así, la componente *x* de la fuerza de fricción por unidad de masa puede escribirse de la forma

$$F_x = \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial z^2}\right) \tag{4.21}$$

siendo $\nu = \mu/\rho$ la viscosidad cinemática molecular y μ el coeficiente de viscosidad molecular. Para una derivación formal del término de fricción molecular se recomienda el capítulo 4 del libro de Kundu & Cohen (2008). Debe tenerse en cuenta que la expresión particular dada por la ecuación 4.21 corresponde a un fluido newtoniano (el agua y el aire lo son) donde además se ha asumido que el fluido es incompresible. Desde un punto de vista práctico, debe tenerse en cuenta que la viscosidad cinemática para el agua es del orden de 10^{-6} m^2s^{-1}, por lo cual la viscosidad molecular es sumamente pequeña y no llegaría ni remotamente para explicar los procesos viscosos que se observan en fluido geofísicos. En apartados posteriores se derivará una nueva forma de los términos de fricción por lo que, mientras tanto mantendremos para las fuerzas de fricción la notación $\boldsymbol{F_r} = (\mathrm{F_x}, \mathrm{F_y}, \mathrm{F_z})$.

4.3.5 La conservación del momento en componentes

Los distintos términos que se acaban de describir dan lugar a la siguiente ecuación de conservación del momento

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{Dt}} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{p} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \mathbf{g} + \boldsymbol{F_r} \tag{4.22}$$

Debe hacerse notar que el término centrífugo ya se ha incluido en el gravitacional y que se seguirá manteniendo una forma general para el término de fricción. Teniendo esto en cuenta

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} + 2\Omega \mathrm{v}\sin\theta + F_x \tag{4.23a}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}} - 2\Omega \mathrm{u}\sin\theta + F_y \tag{4.23b}$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{u}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{w}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} + 2\Omega \mathrm{u}\cos\theta - \mathrm{g} + F_z \tag{4.23c}$$

donde θ es la latitud .

El paso a componentes de todos los términos es trivial, salvo el término de Coriolis que merece una explicación más detallada. Asumamos que el círculo de radio R que aparece en la Figura 4.3 representa una sección de la Tierra. Las componentes cartesianas de la velocidad angular de la Tierra en un sistema de coordenadas locales son

$$\Omega_x = 0;\ \Omega_y = \Omega\cos\theta;\ \Omega_z = \Omega\sin\theta; \tag{4.24}$$

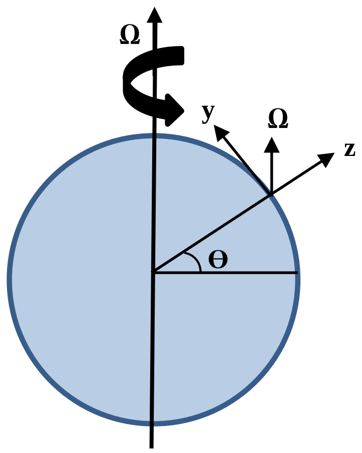

Figura 4.3. Coordenadas cartesianas locales. El eje *X* no aparece ya que es perpendicular al papel apuntando hacia adentro.

De esta forma, el producto vectorial puede expresarse

$$2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2\Omega\cos\theta & 2\Omega\sin\theta \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= 2\Omega[\boldsymbol{i}(w\cos\theta - v\sin\theta) + \boldsymbol{j}\, u\sin\theta - \boldsymbol{k}\, u\cos\theta]$$

Debe tenerse en cuenta que en el término dependiente de $\boldsymbol{i}$**,** la primera parte puede despreciarse ya que tanto en la atmósfera como en el océano las velocidades verticales son mucho menores que las horizontales ($u,v >> w$). Por esa razón, en las ecuaciones 4.23 solo aparecen tres términos dependientes de la latitud. Finalmente, por motivos de comodidad en la notación se define

$$f = 2\Omega\sin\theta \tag{4.25}$$

Esta variable recibe diferentes nombres, tales como *parámetro de Coriolis*, *frecuencia de Coriolis* o *vorticidad planetaria*. Desde un punto de vista práctico, las componente norte y este de la aceleración de Coriolis son

$$\mathbf{a}_c = f\begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$$

El efecto Coriolis es nulo en el ecuador y máximo (en valor absoluto) en los polos, produciendo una desviación hacia la derecha (izquierda) del movimiento en el hemisferio norte (sur). Ejemplos clásicos son el péndulo de Foucault o el giro de los huracanes (contra el reloj en hemisferio norte y a favor en el sur), tal como se muestra en la Figura 4.4.

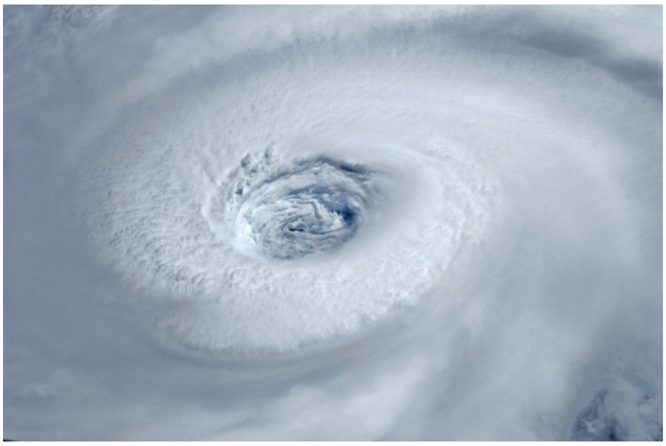

Figura 4.4. Giro antihorario del huracán Igor. Foto ISS024-E-14580*.

4.4 Conservación de la masa

Si se vuelve a considerar un esquema similar al que se mostró en la Figura 4.2, donde las propiedades del fluido sufren un cambio apreciable en un cubo de dimensiones tan pequeñas como se desee.

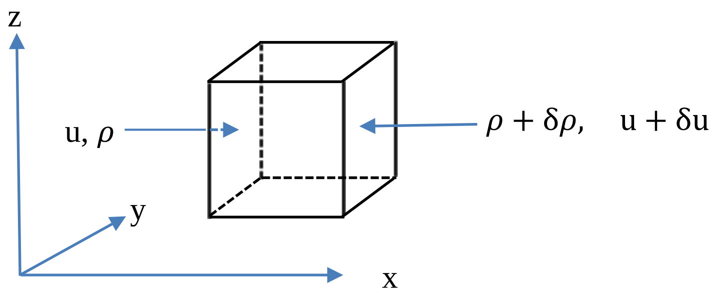

Figura 4.5. Esquema para la derivación de la ecuación de conservación de la masa en un volumen de control (δV). Los lados del cubo tienen dimensiones ($\delta x, \delta y, \delta z$).

Para describir el flujo de masa se calcula lo que entra y sale del volumen

$$\text{entra} \quad \rho u \delta y \delta z \quad \text{y} \quad \text{sale } (\rho + \delta\rho)\,(u + \delta u)\delta y \delta z$$

con lo que el flujo de masa es $(u\delta\rho + \rho\delta u + \delta u\delta\rho)\ \delta y\delta z$. Si se tiene en cuenta que

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\delta x \quad \text{y} \quad \delta\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\delta x$$

el flujo de masa resulta

$$\left(u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta x\delta y\delta z$$

Si se considera que el volumen de control es tan pequeño como se quiera, los lados del cubo tienden a cero, por lo que el tercer término puede despreciarse por ser mucho más pequeño que el resto. Así

$$\text{Flujo de masa } = \left(\mathrm{u}\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{x}} + \rho\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)\delta\mathrm{x}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\ \delta\mathrm{x}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z}$$

Esta expresión puede generalizarse en tres dimensiones

$$Flujo\ de\ masa = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \mathrm{z}}\right)\ \delta\mathrm{x}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z}$$

Este flujo debe verse compensado por un cambio de masa dentro del volumen de control que puede expresarse como $\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\mathrm{x}\delta\mathrm{y}\delta\mathrm{z}$

Por lo que la ecuación de conservación de la masa es

$$\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \mathrm{z}} = 0 \qquad (4.26)$$

Lo que se conoce generalmente como ecuación de continuidad para fluidos compresibles. Si se derivan los términos que dependen de derivadas espaciales, trivialmente se obtiene una forma alternativa de la ecuación de continuidad

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{Dt}} + \frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial w}{\partial \mathrm{z}} = 0 \qquad (4.27)$$

Incluso, puede lograrse una simplificación mayor si se tiene en cuenta que los cambios de densidad en el océano son despreciables frente al valor de la densidad. Esto constituye la aproximación de Boussinesq, lo que equivale a asumir que el agua es incompresible. Así, la ecuación de continuidad queda

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial w}{\partial \mathrm{z}} = 0 \qquad (4.28)$$

Debe hacerse notar, que si bien la aproximación de Boussinesq simplifica la ecuación de continuidad hay un cierto precio que debe pagarse, tal como que las ondas sónicas no pueden estudiarse y que la ecuación solo será válida para velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el agua. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en el agua es del orden de los 1500 m s^{-1}, la limitación parece bastante razonable.

4.5 Turbulencia

La viscosidad molecular que se analizó en la sección 4.4.4 es válida para flujos laminares e importante a lo largo de distancias de unos pocos milímetros, por lo que tiene escasa importancia para los procesos oceánicos. Debe, pues, buscarse algún otro tipo de mecanismo que dé cuenta de fenómenos reales que se observan en el océano, tales como la aparición de remolinos o el hecho de que el calentamiento (enfriamiento) desde la superficie alcance fácilmente decenas de metros.

Si se asume que cualquier variable en el océano (por ejemplo la velocidad en el eje *X*, u) tiene dos partes $u = \mathrm{U} + u'$, donde U es el flujo medio y u' el flujo turbulento, y el promedio de la parte turbulenta es nula ($\langle u'\rangle = 0$ y $\langle u\rangle = \mathrm{U}$). Los corchetes se refieren al valor medio. Debe hacerse notar que el flujo turbulento verifica la ecuación de conservación del momento, sin embargo es virtualmente imposible conocer el flujo en detalle. Debe tenerse en cuenta que existen múltiples escalas tanto espaciales como temporales que hacen el problema inabordable. Dos puntos muy próximos en el espacio pueden tener una dinámica muy distinta en un cierto instante y el mismo punto puede tener una dinámica muy distinta si se consideran dos instantes muy próximos. En realidad, a efectos prácticos lo que interesa es tener un conocimiento más global del flujo, tal como puede ser su velocidad media en una cierta zona y durante un cierto intervalo de tiempo. Lo que se tratará de hacer en esta sección es conocer las ecuaciones de movimiento que caracterizan el flujo medio, en otras palabras, en vez de resolver la ecuación 4.23a para la variable u trataremos de encontrar una ecuación similar para la variable U. Los términos lineales son triviales, de tal forma que lo relación funcional que se tenía para la variable total se tendrá ahora para la variable promedio.

Consideremos en primer lugar la ecuación de continuidad 4.28 y descompongamos la variable total en una parte media y una turbulenta

$$\frac{\partial U+u'}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial V+v'}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial W+w'}{\partial \mathrm{z}}=\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial V}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial W}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial v'}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial w'}{\partial \mathrm{z}}=0$$

Si se calcula el valor medio de esta ecuación, las componentes medias quedan como están y las fluctuantes desaparecen, con lo cual

$$\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial V}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial W}{\partial \mathrm{z}}=0 \tag{4.29a}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial v'}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial w'}{\partial \mathrm{z}}=0 \tag{4.29b}$$

Veamos a continuación los diferentes términos que aparecen en la ecuación de conservación del momento. Si se considera por simplicidad en la notación $\alpha=1/\rho$, cualquier gradiente de presión puede escribirse de la forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}=\alpha\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}=(\mathrm{A}+\alpha')\frac{\partial \mathrm{P}+p'}{\partial \mathrm{x}}$$

si se calcula el valor medio

$$\langle(\mathrm{A}+\alpha')\frac{\partial \mathrm{P}+p'}{\partial \mathrm{x}}\rangle=\mathrm{A}\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+\langle\mathrm{A}\frac{\partial p'}{\partial \mathrm{x}}\rangle+\langle\alpha'\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}\rangle+\langle\alpha'\frac{\partial p'}{\partial \mathrm{x}}\rangle$$

Trivialmente, el primer término es equivalente al gradiente de presión del que se partía, pero sobre la variable promedio, mientras que el segundo y tercero son nulos ya que conllevan el promedio de una variable fluctuante. En principio, el cuarto término puede no desaparecer si las variables fluctuantes están correlacionadas. Sin embargo, a efectos prácticos, el término es despreciable ya que las variaciones de α en el océano son mucho menores que el valor de A. De esta forma, quedará un término formalmente igual de la ecuación 4.23a.

$$\alpha \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \rightarrow \mathrm{A}\, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}$$

El resto de términos que involucran gradientes de presión pueden calcularse de forma análoga.

Por otro lado, los términos de Coriolis que aparecen en las componentes horizontales de la ecuación de conservación del momento reciben un tratamiento similar,

$$f\, v \rightarrow f\, V \quad \mathrm{y} - f\, u \rightarrow -f\, U$$

Lo mismo sucede para el término de Coriolis que aparece en la ecuación w, así como en las derivadas locales.

El término de fricción también es lineal, por lo que cualquiera de las componentes que incluyan derivadas espaciales segundas se transformarán como

$$\langle \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} \rangle \; = \langle \frac{\partial^2 (\mathrm{U} + u')}{\partial \mathrm{x}^2} \rangle = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

También, la derivada parcial con respecto al tiempo conserva su forma, ya que

$$\langle \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} \rangle \; = \langle \frac{\partial (\mathrm{U} + u')}{\partial \mathrm{t}} \rangle = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} + \langle \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{t}} \rangle = \; \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}$$

Todos los términos que acabamos de ver tienen exactamente la misma forma para el flujo medio que para el flujo total. Las únicas diferencias vendrán de los términos advectivos, los cuales son no lineales y combinan velocidades y gradientes de velocidades. Así, tomando cualquiera de los términos

$$\langle u \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} \rangle \; = \langle (\mathrm{U} + u') \frac{\partial (\mathrm{U} + u')}{\partial \mathrm{x}} \rangle = \langle U \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} \rangle + \langle U \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} \rangle + \langle u' \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} \rangle + \langle u' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} \rangle$$

Una vez más, el primer término para el flujo medio coincide con el que se tenía para el flujo total, mientras que los términos segundo y tercero son nulos ya que contienen el promedio de variables fluctuantes. Sin embargo, aparece un término nuevo que es promedio de dos variables fluctuantes y que no puede asegurarse que sea nulo.

Así, si consideramos (por ejemplo), los términos advectivos de la componente x en la ecuación de conservación del momento

$$\begin{aligned} &\langle u \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + v \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + w \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} \rangle \\ &\qquad = \; U \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}} + V \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}} W \frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}} + \langle u' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} \rangle + \langle v' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{y}} \rangle + \langle w' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{z}} \rangle \end{aligned} \tag{4.30}$$

Debemos recordar que por la ecuación 4.29b $\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v'}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial w'}{\partial \mathrm{z}} = \nabla \boldsymbol{u}' = 0$, por lo que el producto de u' por esa divergencia también será nulo. Entonces

$$u' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} + v' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{y}} + w' \frac{\partial u'}{\partial \mathrm{z}} + u' \left(\frac{\partial u'}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v'}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial w'}{\partial \mathrm{z}} \right) \; = \; \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} u'u' + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} u'v' + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} u'w'$$

Si se vuelve a la ecuación 4.30

$$\langle u\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}+v\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}+w\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\rangle = U\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}+V\frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}+W\frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}}+\langle\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}u'u'\rangle+\langle\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}u'v'\rangle+\langle\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}u'w'\rangle$$

Con lo que hemos desarrollado el último término que nos quedaba para la componente x de la ecuación de conservación del momento, que para el flujo medio quedaría como

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}+U\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}+V\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}+W\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\langle u'u'\rangle+\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\langle u'v'\rangle+\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\langle u'w'\rangle$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+2\Omega \mathrm{V}\sin\theta+\nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}^2}\right)$$

así, agrupando términos en la derivada total y pasando los términos promedio que dependen de variables fluctuantes al segundo miembro se obtiene

$$\frac{\mathrm{DU}}{\mathrm{Dt}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+2\Omega \mathrm{V}\sin\theta+\nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}^2}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\langle u'u'\rangle-\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\langle u'v'\rangle-\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\langle u'w'\rangle \qquad (4.31)$$

El resto de componentes se resolverían de forma análoga. Claramente hay un problema, ya que todavía quedan unas variables fluctuantes, con lo cual se tienen más variables que ecuaciones y, por lo tanto, se tiene un problema de cierre. Una forma de solucionar este problema es la utilización de los llamados *Reynolds Stresses*, para lo cual se sigue la analogía con el caso de viscosidad molecular, de tal forma que

$$-\langle u'u'\rangle=A_x\frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}};\ -\langle u'v'\rangle=A_y\frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}};\ -\langle u'w'\rangle=A_z\frac{\partial U}{\partial \mathrm{z}}; \qquad (4.32)$$

Debe notarse que, a diferencia del caso de viscosidad molecular, donde el medio se consideraba isótropo, aquí los coeficientes de viscosidad dependen de la dirección. De esta forma los tres términos finales de la ecuación 4.31 se convierten en

$$A_x\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{x}^2}+A_y\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{y}}+A_z\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{z}^2} \qquad (4.33)$$

Por lo que las ecuaciones de conservación del momento en componentes dadas por 4.23 pasarían a ser

$$\frac{\mathrm{DU}}{\mathrm{Dt}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+2\Omega \mathrm{V}\sin\theta+\left(A_x\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2}+A_y\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}^2}+A_z\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}^2}\right) \qquad (4.34a)$$

$$\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{Dt}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}-2\Omega \mathrm{U}\sin\theta+\left(A_x\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}^2}+A_y\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{y}^2}+A_z\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}^2}\right) \qquad (4.34b)$$

$$\frac{\mathrm{DW}}{\mathrm{Dt}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{z}}+2\Omega \mathrm{U}\cos\theta-\mathrm{g}+\left(A_x\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}^2}+A_y\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{y}^2}+A_z\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial \mathrm{z}^2}\right) \qquad (4.34c)$$

Debe hacerse notar que los coeficientes de viscosidad turbulentos (A_x, A_y, A_z) son mucho mayores que ν, por lo que se ha suprimido la viscosidad molecular. A diferencia de lo que sucedía en el caso molecular, donde los coeficientes representaban una propiedad del fluido, en el caso de los coeficientes de viscosidad turbulentos, estos representan una propiedad del flujo. Es por esto que no se puede dar un valor único, sino que dependerá de las condiciones de movimiento del fluido. En cualquier caso, los valores varían en un amplio rango de 10^{-5} - 10^{-1} m^2s^{-1} para A_V y de $10 – 10^5$ m^2s^{-1} para A_H, donde los subíndices se refieren a valores verticales (coordenada z) y horizontales (coordenadas x e y) respectivamente.

REFERENCIAS

Kundu, P.K, Cohen, I.M. (2008). Fluid Mechanics. Academic Press.
Pedlosky, J. (1987). Geophysical Fluid Dynamics. Springer.
Open University (2002) Ocean Circulation. 2nd edition. Pergamon Press.
Pond, S. & Pickard, G.L. Introductory Dynamical Oceanography. 2nd edition. Butterworth Heinemann
Stewart, R.H. (2008) Introduction to physical oceanography.

* Fotos tomadas de *Image Science and Analysis Laboratory, NASA-Johnson Space Center. "The Gateway to Astronaut Photography of Earth." (http://eol.jsc.nasa.gov).*