

Aplicación del modelo SPH en la protección de costas

A. BARREIRO*, A.J.C. CRESPO, J.M. DOMÍNGUEZ, M. GÓMEZ-GESTEIRA

*anxo.barreiro@uvigo.es

*EPhysLab, Facultade de Ciencias,
Universidade de Vigo
Campus As Lagoas s/n, Ourense, España*

RESUMEN

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) es un método numérico para la resolución de problemas de dinámica computacional. Se trata de un método lagrangiano, que en los últimos años se ha aplicado en numerosos campos de la dinámica de fluidos. En particular, reproduce fácilmente fenómenos de superficie libre en los que se estudien la rotura de olas, interacciones fluido-estructura y comportamientos no lineales de fluidos. DualSPHysics es un código SPH, el cual permite simular millones de partículas en un tiempo razonable, lo que hace posible el estudio de problemas reales de ingeniería. En este trabajo se describe la formulación SPH y los algoritmos implementados en el modelo. DualSPHysics se valida con datos experimentales mostrando fiabilidad, precisión y eficiencia. Finalmente, se muestran las capacidades de DualSPHysics para reproducir la interacción ola-estructura. En particular, se calculan las alturas de ola y las fuerzas ejercidas sobre diferentes objetos de la costa en un caso de estudio con dimensiones y geometrías muy próximas a las reales.

Palabras clave: SPH, Computación Dinámica de Fluidos, aproximación lagrangiana, protección de costas.

1. Introducción

El modelado numérico se usa como una herramienta muy útil en el campo de la ingeniería y de la ciencia para resolver problemas complejos. La ventaja principal de usar estos métodos es la capacidad de simular cualquier escenario por muy complejo que éste sea sin la necesidad de construir costosos modelos físicos a escala. Además, la simulación numérica puede proporcionar datos físicos que pueden ser difícilmente, o incluso imposibles de medir en un modelo real.

Las ecuaciones físicas que rigen un método numérico se pueden resolver con la ayuda de una malla usando una descripción Euleriana o se pueden resolver sin el uso de la malla con una descripción Lagrangiana. Los métodos basados en una malla (elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes finitos) son actualmente muy robustos, están bien desarrollados y han sido aplicados a un amplio abanico de aplicaciones en las que proporcionan resultados muy precisos. Estos métodos de malla son ideales para sistemas con dominios perfectamente delimitados y para simulaciones donde los contornos

permanecen fijos. Sin embargo la creación de la malla puede resultar muy ineficiente si el sistema es complejo. Este trabajo se centra en métodos sin malla, los cuales se usan tanto en mecánica de sólidos como en dinámica de fluidos. Los métodos que no usan malla permiten simular más fácilmente problemas en los que se estudien geometrías muy complejas, grandes deformaciones, discontinuidades en el flujo del fluido o singularidades del material. Dentro de este gran grupo de modelos numéricos sin malla está el método llamado Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

SPH es un método computacional para la resolución de problemas de dinámica fluidos. Se trata de un método lagrangiano, desarrollado en los años setenta aplicado a la astrofísica y cosmología (Gingold y Monaghan, 1977; Lucy, 1977). En los últimos años este método ha terminado aplicándose en numerosos campos de la dinámica de fluidos.

En el método SPH no se usa malla, eliminando así las restricciones que derivan de emplear los métodos eulerianos. Éstos discretizan el medio físico haciendo uso de una malla que lo abarca completamente, así los lugares en los que existen interacciones y los lugares vacíos son tratados del mismo modo. Esto provoca un aumento del tiempo de cálculo y un uso ineficiente de la memoria del sistema. Sin embargo los métodos lagrangianos no usan una malla para definir el medio. El volumen que se tiene en cuenta es aquel en el que haya fluido, por ello, la cantidad de memoria empleada, al no almacenar datos de zonas vacías, es menor.

SPH discretiza el fluido como un conjunto de puntos o nodos llamados partículas (ver Figura 1). En SPH se resuelve la integral de las ecuaciones de movimiento de la dinámica de fluidos en cada punto en el formalismo lagrangiano, calculando los valores de

las variables físicas representativas (velocidad, posición, densidad y presión) para una partícula como la interpolación de los valores de las partículas más próximas. Para representar el paso de un medio continuo, como lo es un fluido, a un medio discreto, partículas, se emplea la función kernel. Esta función tiene un soporte compacto dentro de una región que viene determinada por una distancia mucho más pequeña que la escala característica del problema. Esta distancia, definida por el kernel, es la distancia de interacción de las partículas.

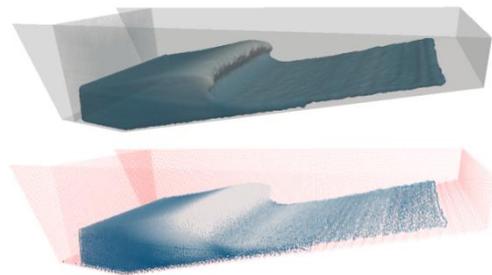


Fig. 1. Imagen de fluido continuo (arriba) y de partículas en SPH (abajo).

SPHysics es un proyecto desarrollado en conjunto por investigadores de la Universidad Johns Hopkins (Estados Unidos), la Universidad de Vigo (España) y la Universidad de Manchester (Reino Unido). Este grupo ha centrado su investigación en la propagación de las olas y en su interacción con estructuras costeras, tanto en 2D (Gómez-Gesteira et al., 2005; Dalrymple y Rogers, 2006; Crespo et al., 2008) como en 3D (Gómez-Gesteira y Dalrymple, 2004; Crespo et al., 2007a).

El código SPH llamado SPHysics es un código numérico desarrollado para el estudio de fluidos de superficie libre. El código está escrito en FORTRAN90, es un código libre y se puede descargar gratuitamente desde la web www.sphysics.org. Uno de los propósitos de este proyecto es fomentar el uso del método SPH entre los investigadores e invitarlos a contribuir al proyecto enviando sus mejoras. A pesar

de que el código SPHysics puede proporcionar una descripción precisa del fluido, su mayor limitación es el alto coste computacional del programa ejecutado en serie, lo cual hace imposible su uso de manera eficiente para estudiar problemas reales de ingeniería. El tiempo computacional se incrementa con el aumento de partículas que componen los sistemas, por lo que muchos problemas son inviables por la complejidad de los mismos. Además de existir un límite temporal en las simulaciones, también hay un límite en el número de partículas que los procesadores pueden administrar. Por este motivo, HPC (High Performance Computing) es la herramienta necesaria para alcanzar nuevas cotas en el modelado de problemas de ingeniería, más concretamente, en este trabajo se emplean GPUs (Graphics Processing Units). Las GPUs aparecen como una alternativa accesible para acelerar los métodos SPH usando un potente modelo de programación en paralelo donde las tarjetas gráficas se usan como dispositivo de ejecución. Ésta es una tecnología nueva desarrollada por la industria de los videojuegos y que proporciona un alto rendimiento con un gasto económico razonable. Así, las GPUs hacen posible el estudio de problemas reales de ingeniería mediante modelos SPH. De este modo se desarrolló el código DualSPHysics (www.dual.sphysics.org) escrito en C++ y CUDA (lenguaje de programación para las GPU) que se puede descargar en la web www.dual.sphysics.org. Este nuevo código se describirá con mayor detalle en los próximos capítulos, en los que se presentará la teoría del método SPH implementada en el código, se describirá un caso de validación y se presentarán los nuevos casos de aplicación.

2. Método SPH

Las principales características de la formulación básica del método SPH se describen en detalle en los artículos Monaghan, 1982; Monaghan, 1992; Liu, 2003; Liu y Liu, 2003; Monaghan, 2005.

2.1 Método de interpolandos

SPH se basa en la teoría de los interpolandos integrales. El principio fundamental es aproximar cualquier función $A(\mathbf{r})$ por:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{r}')W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h)d\mathbf{r}' \quad (1)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición; W es la función de peso o kernel; h es la distancia de interacción llamada distancia de suavizado que controla el dominio de Ω (ver Figura 2). El valor de h debería ser mayor que la distancia inicial de separación entre partículas.

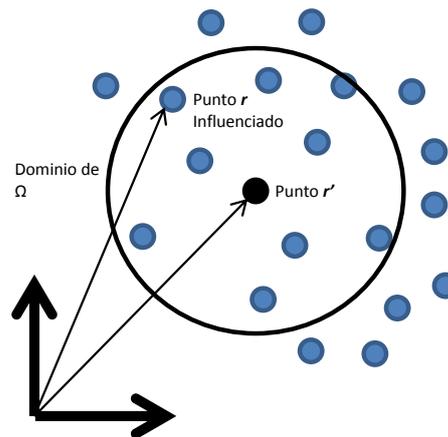


Fig. 2. Esquema del dominio de influencia.

La aproximación (1), en notación discreta, lleva a la siguiente aproximación de la función en la posición de la partícula a:

$$A_a = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W_{ab} \quad (2)$$

donde el sumatorio se realiza sobre las partículas vecinas b que se encuentran en la región de soporte compacto de la función kernel. La masa y la densidad de las partículas vecinas se denotan como m_b y ρ_b respectivamente y $W_{ab}=W(\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b, h)$ es la función de peso o kernel.

Una de las ventajas de la aproximación usando el kernel SPH es que la derivada de la función se calcula analíticamente. Sin embargo, en el método de las diferencias finitas las derivadas se calculan por los puntos vecinos usando el espacio entre ellos, lo cual sería muy complicado para partículas distribuidas de forma irregular, como es el caso de SPH. Las derivadas de estos interpolandos pueden obtenerse por diferenciación ordinaria:

$$\nabla A_a(\mathbf{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W_{ab} \quad (3)$$

2.2 Función kernel

El rendimiento de un modelo SPH depende de la elección de las funciones de peso. Estas deben satisfacer diferentes condiciones tales como ser positiva, tener soporte compacto y estar normalizada. También, W_{ab} debe ser monótona decreciente con el incremento de la distancia entre partículas y comportarse como una función delta cuando la longitud de suavizado, h , tiende a 0.

Es decir la función *kernel* debe estar:

-Definida positiva:

$W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) \geq 0$ dentro del dominio Ω

-Soporte compacto:

$W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) = 0$ fuera del dominio Ω

-Normalizada:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) d\mathbf{r}_b = 1$$

-Comportamiento delta:

$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h) d\mathbf{r}_b = \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)$

-Comportamiento decreciente monótono.

Los *kernel* dependen de la distancia de suavizado, h , y de la distancia adimensional entre partículas dado por $q = r_{ab}/h$, donde r_{ab} es la distancia entre las partículas a y b ($r_{ab} = r_a - r_b$). El parámetro h controla el tamaño del área alrededor de la partícula a donde la contribución del resto de partículas no puede ser despreciada.

Hay una gran variedad de posibles funciones *kernel*. En general, la precisión de la interpolación SPH aumenta con el orden de los polinomios usados para definir el *kernel*, sin embargo, el tiempo de computación también aumenta.

Posiblemente, el *kernel* más conocido y usado sea el cubic-spline:

$$W(q, h) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

donde $q = r/h$, α_D es $10/(7\pi h^2)$ en 2D y $1/(\pi h^3)$ en 3D.

2.3 Ecuación de momento

La ecuación de conservación del momento en un campo continuo se expresa como:

$$\frac{D\mathbf{v}_a}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \Theta \quad (5)$$

donde \mathbf{v} es la velocidad, P y ρ son presión y densidad, $\mathbf{g} = (0,0,-9.81)ms^{-2}$ es la aceleración gravitacional y Θ se refiere a los términos de difusión.

El término del gradiente de presión en forma simétrica se expresa en notación SPH como:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P = -\sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} \quad (6)$$

donde P_b y ρ_b son la presión y densidad de las partículas vecinas b y $W_{ab} = W(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b, h)$ es la función *kernel*.

Así, la ecuación de conservación del momento será (Monaghan, 1992):

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} \quad (7)$$

Diferentes aproximaciones, basadas en formulaciones existentes de los términos difusivos, pueden ser consideradas en el método SPH para describir la ecuación del momento.

2.4 Viscosidad

(13)

Dos tipos de viscosidad pueden ser empleados en nuestro código SPH; (i) Artificial y (ii) Laminar.

2.4.1 Viscosidad Artificial

La viscosidad artificial propuesta por Monaghan 1992 ha sido frecuentemente empleada debido a su simplicidad. En notación SPH, la ecuación de momento que incluye la viscosidad artificial puede ser reescrita como:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} \quad (8)$$

donde Π_{ab} es el término de viscosidad:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \overline{c_{ab}} \mu_{ab}}{\rho_{ab}}, & \text{si } \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab} < 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

con

$$\mu_{ab} = \frac{h \mathbf{v}_{ab} \cdot \mathbf{r}_{ab}}{\mathbf{r}_{ab}^2 + \eta^2} \quad (10)$$

donde $\overline{\rho_{ab}} = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b)$, $\overline{c_{ab}} = \frac{1}{2}(c_a + c_b)$; $\eta^2 = 0.01h^2$; α es un parámetro libre que puede cambiar ajustándose a cada problema.

2.4.2 Viscosidad Laminar

La ecuación de conservación del momento con viscosidad laminar es:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} + \nu_0 \nabla^2 \mathbf{v} \quad (11)$$

y el término laminar se simplifica (Morris *et al.*, 1997; Lo y Shao, 2002) a:

$$(\nu_0 \nabla^2 \mathbf{v})_a = \sum_b m_b \left(\frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b) |\mathbf{r}_{ab}|^2} \right) \mathbf{v}_{ab} \quad (12)$$

donde ν_0 es el término de viscosidad cinética del fluido ($0.893 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ en el caso del agua).

De este modo, en notación SPH, la ecuación de momento usando viscosidad laminar se expresa como:

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left(\frac{P_a}{\rho_a^2} + \frac{P_b}{\rho_b^2} \right) \nabla_a W_{ab} + \mathbf{g} + \sum_b m_b \left(\frac{4\nu_0 \mathbf{r}_{ab} \nabla_a W_{ab}}{(\rho_a + \rho_b) |\mathbf{r}_{ab}|^2} \right) \mathbf{v}_{ab}$$

2.5 Ecuación de continuidad

Los cambios en la densidad del fluido se calculan por medio de:

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \mathbf{v}_{ab} \nabla_a W_{ab} \quad (14)$$

Se emplea un diferencial temporal en lugar de un sumatorio ponderado de los términos de masa (Monaghan, 1992), ya que el sumatorio ponderado resulta en una disminución de la densidad cerca de las zonas de contacto entre diferentes fluidos, cerca de la superficie y cerca de los contornos.

2.6 Ecuación de estado y compresibilidad

En el formalismo estándar de SPH, el fluido es tratado como ligeramente compresible, lo cual facilita el uso de una ecuación de estado para determinar la presión del fluido, que es mucho más rápido que resolver una ecuación como la de Poisson usada en el tratamiento incompresible. Siguiendo Monaghan, 1994 y Batchelor, 1974, la relación entre presión y densidad, sigue la ecuación de estado de Tait. Se puede apreciar que una pequeña oscilación en la densidad puede generar una gran variación en la presión.

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (15)$$

El parámetro B es una constante relacionada con el módulo de la compresibilidad del fluido, $\rho_0 = 1000.0 \text{ Kg/m}^3$ es la densidad de referencia, tomada como la densidad del fluido en la superficie y γ es la constante politrópica, normalmente entre 1 y 7.

En este fluido compresible se define una velocidad del sonido, c , que viene dada por la raíz cuadrada de la derivada de esta ecuación de estado respecto a la densidad:

$$c^2(\rho) = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{B\gamma}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{B\gamma}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

$$c_0^2 = c^2(\rho_0) = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{B\gamma}{\rho_0} \quad (16)$$

$$(17)$$

donde c_0 es la velocidad del sonido para la densidad de referencia (en la superficie del fluido); la contante B es igual a $B = c_0^2 \rho_0 / \gamma$ y además proporciona un límite para el máximo cambio de densidad.

2.7 Correcciones y Filtros

SPH puede generar inexactitudes en la cercanía de las fronteras o en la cercanía de la superficie libre, donde la condición de normalización no se cumple correctamente. Se han empleado grandes esfuerzos para superar este problema, los cuales se han concentrado en aproximaciones que corrigen el *kernel* y/o su primera derivada, o aplicando filtros de densidad, los cuales pueden ayudar a estabilizar los campos de presión.

2.7.1 Filtro de densidad

Mientras que la cinemática de las simulaciones SPH es, en general, realista, los campos de presión de las partículas pueden exhibir grandes oscilaciones de presión. Éstas pueden ser particularmente importantes en las cercanías de las fronteras y cerca de la superficie libre. Una de las maneras más sencillas y menos caras computacionalmente de suavizar las oscilaciones de presión es realizar un filtro sobre la densidad de las partículas y reasignar una densidad a cada partícula teniendo en cuenta los valores de las partículas vecinas, como se realizó en Colagrossi y Landrini, 2003 siguiendo Belytschko *et al.*, 1998 y Dilts, 1999.

El filtro Shepard es una corrección rápida y simple al campo de densidades. El siguiente protocolo es aplicado cada cierto número de pasos de tiempo:

$$\begin{aligned} \rho_a^{nueva} &= \sum_b \rho_b \tilde{W}_{ab} \frac{m_b}{\rho_b} \quad (18) \\ &= \sum_b m_b \tilde{W}_{ab} \end{aligned}$$

donde el *kernel* ha sido corregido con:

$$\tilde{W}_{ab} = \frac{W_{ab}}{\sum_b W_{ab} \frac{m_b}{\rho_b}} \quad (19)$$

2.7.2 Correcciones de kernel y gradiente de kernel

Algunos términos correctivos del *kernel* para la mejora de la precisión del mismo y de las estimaciones del gradiente *kernel* están disponibles en la literatura (Belytschko *et al.*, 1998; Bonet y Lok, 1999; Vila, 1999; Chen y Beraun, 2000).

La corrección del *kernel* propuesta por Bonet y Lok, 1999 consiste en que una variable vectorial (f_a) puede ser expresada como:

$$f_a = \frac{\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} f_b W_{ab}}{\sum_b \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab}} \quad (20)$$

Por otro lado, la corrección del gradiente de *kernel* $\tilde{\nabla} W_{ab}$ también debe ser usada para calcular las fuerzas en la ecuación de movimiento en lugar del gradiente de *kernel* ∇W_{ab} , siendo:

$$\tilde{\nabla} W_{ab} = L_a \nabla W_{ab} \quad (21)$$

$$L_i = M_i^{-1} \quad (22)$$

$$M_a = \sum_b^{num} \frac{m_b}{\rho_b} \nabla W_{ab} \otimes (x_a - x_b) \quad (23)$$

donde *num* es el número total de partículas interactuando con la partícula a .

2.8 Algoritmos de paso de tiempo

Las magnitudes físicas (velocidad, densidad, posición y densidad) cambian cada paso de tiempo debido a las interacciones entre las partículas. Los algoritmos de integración de tiempo en SPH deben ser al menos de segundo orden para obtener resultados precisos.

Dos posibilidades son: (i) Verlet y (ii) Simpléctico.

2.8.1 Algoritmo Verlet

Este algoritmo de paso de tiempo (Verlet, 1967) está dividido en dos partes. En general, las variables son calculadas de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a^{n+1} &= \mathbf{v}_a^{n-1} + 2\Delta t \mathbf{F}_a^n; \\ \rho_a^{n+1} &= \rho_a^{n-1} + 2\Delta t D_a^n; \\ \mathbf{r}_a^{n+1} &= \mathbf{r}_a^n + \Delta t \mathbf{V}_a^n + 0.5\Delta t^2 \mathbf{F}_a^n; \\ \rho_a^{n+1} &= e_a^{n-1} + 2\Delta t E_a^n \end{aligned} \quad (24)$$

Una vez cada N pasos de tiempo (N del orden de 50), las variables se calculan de acuerdo a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a^{n+1} &= \mathbf{v}_a^n + \Delta t \mathbf{F}_a^n; \\ \rho_a^{n+1} &= \rho_a^n + \Delta t D_a^n; \\ \mathbf{r}_a^{n+1} &= \mathbf{r}_a^n + \Delta t \mathbf{V}_a^n + 0.5\Delta t^2 \mathbf{F}_a^n; \\ \rho_a^{n+1} &= e_a^n + 2\Delta t E_a^n \end{aligned} \quad (25)$$

Lo que sirve para parar la integración divergente del tiempo dado que las ecuaciones no están acopladas.

2.8.2 Algoritmo Simpléctico

En el algoritmo Simpléctico (Leimkhuler, 1979), primero, los valores de la densidad y la aceleración son calculados en el tiempo de paso medio como:

$$\begin{aligned} \rho_a^{n+\frac{1}{2}} &= \rho_a^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{d\rho_a^n}{dt}, \\ \mathbf{r}_a^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{r}_a^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{d\mathbf{r}_a^n}{dt}, \end{aligned} \quad (26)$$

En un segundo paso $(d(\omega_i \rho_i \mathbf{v}_i)^{n+\frac{1}{2}})/dt$ nos da la velocidad y la posición de las partículas al final de cada paso de tiempo:

$$\begin{aligned} &(\omega_a \rho_a \mathbf{v}_a)^{n+1} = \\ &= (\omega_a \rho_a \mathbf{v}_a)^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d(\omega_i \rho_i \mathbf{v}_i)^{n+\frac{1}{2}}}{dt}, \\ &\mathbf{r}_a^{n+1} = \mathbf{r}_a^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_a^{n+1} \end{aligned} \quad (27)$$

Al final de este paso de tiempo $d\rho_a^{n+1}/dt$ se calcula usando los valores

actualizados de \mathbf{v}_a^{n+1} y \mathbf{r}_a^{n+1} (Monaghan, 2005).

2.8.3 Paso de tiempo variable

El paso de cálculo es muy dependiente de las propiedades del fluido. Por ejemplo, el paso de cálculo desciende cuando el fluido colisiona con contornos fijos ya que las fuerzas aumentan o durante la rotura de una ola donde los valores de velocidad también aumentan. En general, el paso de tiempo depende de la condición de Courant, de los términos de fuerza y del término de difusión viscosa. Se calcula un paso de tiempo variable Δt acorde a Monaghan y Kos, 1999:

$$\begin{aligned} \Delta t &= C \cdot \min(\Delta t_F, \Delta t_{CV}), \\ \Delta t_F &= \min_a \left(\sqrt{h/f_a} \right), \\ \Delta t_{CV} &= \min_a \frac{h}{c_s + \max_b \left| \frac{h v_{ab} x_{ab}}{r_{ab}^2} \right|} \end{aligned} \quad (28)$$

Aquí Δt_F se basa en la fuerza por unidad de masa $|f_a|$, y Δt_{CV} controla la condición de Courant y la viscosidad del sistema. C es una constante que puede variar entre 0.1 y 0.3.

2.9 Condiciones de contorno

En SPH, los contornos (muros, suelo, estructuras costeras, pistones...) son descritos por un conjunto discreto de partículas de contorno las cuales ejercen una fuerza repulsiva sobre las partículas fluidas cuando se acercan.

En el modelo SPH usado en este trabajo se ha empleado una condición de contorno dinámica en donde las partículas de los contornos satisfacen las mismas ecuaciones que las partículas fluidas permitiendo así que su densidad y presión evolucionen. Sin embargo existe una diferencia y es que el movimiento de las partículas contorno no vendrá definido por las

fuerzas entre partículas; se mantendrán fijas en una posición (contornos fijos) o se moverán de acuerdo a algún tipo de movimiento impuesto externamente (puertas, pistones...). Usando esta condición de frontera, cuando una partícula fluida se acerca a un contorno y la distancia entre ellas se hace menor que el rango del *kernel*, la densidad de las partículas contorno aumentan dando como resultado un incremento de la presión. La fuerza ejercida sobre la partícula fluida también se incrementa debido al término de presión (P/ρ^2) en la ecuación del momento creándose así un mecanismo de repulsión entre el contorno y fluida. Para una descripción completa de estas condiciones de contorno se puede consultar Crespo *et al.*, 2007b.

3. Validación

El código DualSPHysics fue validado con el mismo experimento que se usó en Gómez-Gesteira y Dalrymple, 2004. Así se comparan los resultados obtenidos con el modelo numérico con los datos experimentales del experimento de Yeh y Petroff realizado en la Universidad de Washington donde un volumen de agua confinada en un tanque rectangular colisiona con una estructura situada en el medio. Las medidas experimentales incluían la serie temporal de la fuerza neta ejercida sobre la estructura y la velocidad del fluido en una posición dada justo delante de la estructura. En la figura 3 se observan diferentes instantes de la simulación numérica usando DualSPHysics. El color representa valores de velocidad

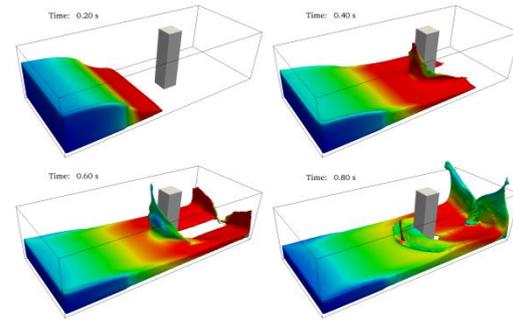


Fig. 3. Fluido impactando con la estructura usando DualSPHysics.

Las figuras 4 y 5 muestra la comparación entre la velocidad numérica (línea roja), la fuerza numérica (línea verde) y los valores experimentales de ambas (puntos azules). Se concluye que SPH es capaz de reproducir el campo de velocidades experimentales y las fuerzas generadas en la colisión entre del fluido y la estructura aunque el valor máximo del impacto es subestimado que es muy probable que sea debido a la formulación SPH o a las condiciones de contorno.

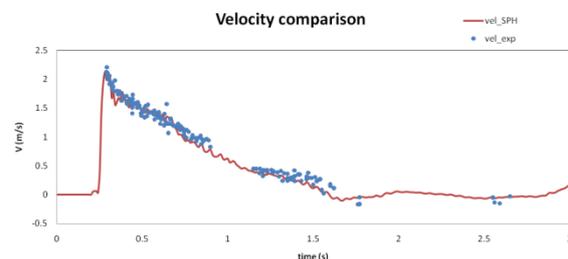


Fig. 4. Comparación entre los resultados de fuerza calculados con SPH y los datos experimentales.

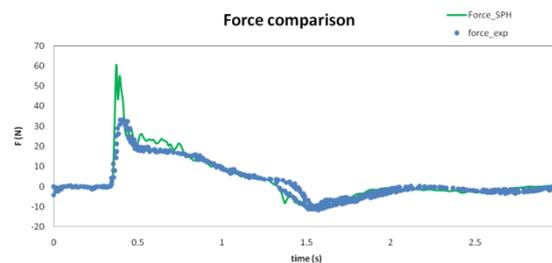


Fig. 5. Comparación entre los resultados de velocidad calculados con SPH y los datos experimentales.

4. Aplicación

En este apartado se describe el caso de aplicación que consistirá en la propagación de una ola y su interacción con un paseo marítimo. Se emplean dimensiones reales, las cuales se pueden ver en las Figuras 6 y 7. Estas medidas podrían encontrarse en el paseo marítimo de cualquier localidad del norte de la península ibérica donde se tienen registrados eventos de olas enormes.

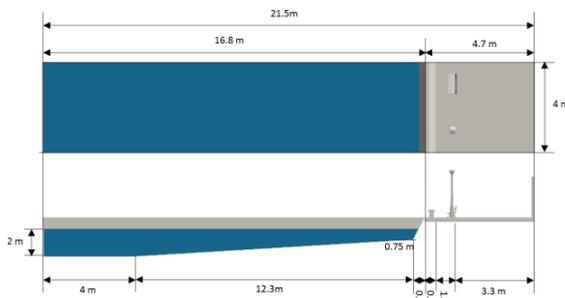


Fig. 6. Medidas del caso de aplicación.

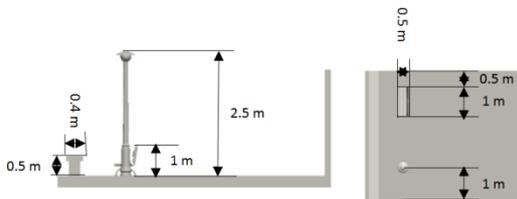


Fig. 7. Detalle del mobiliario urbano y medidas.

4.1. Simulación SPH

Se usa DualSPHysics para realizar la simulación del caso durante 9 segundos de tiempo físico. Durante este tiempo se genera la ola con un pistón en el lado izquierdo de la Figura 6, la ola se propaga hasta el muro, lo sobrepasa e impacta con el mobiliario urbano.

Las opciones utilizadas en la simulación SPH son similares a las del caso de validación y se resumen en la Tabla 1.

Algoritmo del paso de tiempo	Verlet con paso variable
Función Kernel	Cubic Spline
Condiciones de contorno	Contornos dinámicos
Tratamiento de la viscosidad	Viscosidad artificial con $\alpha=0.25$

TABLA 1. Parametrizaciones SPH de la simulación.

Para crear la geometría del caso de estudio y el volumen de agua se usa una distancia entre partículas de $dp=0.026m$, lo cual implica una longitud de suavizado $h=0.039m$ y una cantidad total de partículas en el sistema de 3,969,726 (unos 4M), de las cuales 500,000 son contorno y 3,500,000 fluidas. Este número de partículas está cercano al máximo que podemos simular con una tarjeta GPU GTX480 para este caso ya que dispone de una memoria de 1.5 GB.

Se realizan 4 simulaciones diferentes manteniendo las opciones de simulación y el número de partículas, pero variando las características del pistón que genera las olas (frecuencia, amplitud y fase) para así poder crear 4 olas de 4 alturas diferentes. Las opciones usadas para crear las diferentes olas aparecen en la Tabla 2.

ola	Frecuencia (Hz)	Amplitud (m)	Fase (rad)
1	0.12	1.8	$3\pi/2$
2	0.12	2.0	$3\pi/2$
3	0.14	1.8	$3\pi/2$
4	0.14	2.0	$3\pi/2$

TABLA 2. Calibraciones del pistón para generar 4 olas diferentes.

En las siguientes Figuras se muestran diferentes instantes de las simulaciones; la ola #1 en la Figura 8, la ola #2 en la Figura 9, la ola #3 en la Figura 10 y la ola #4 en la Figura 11.

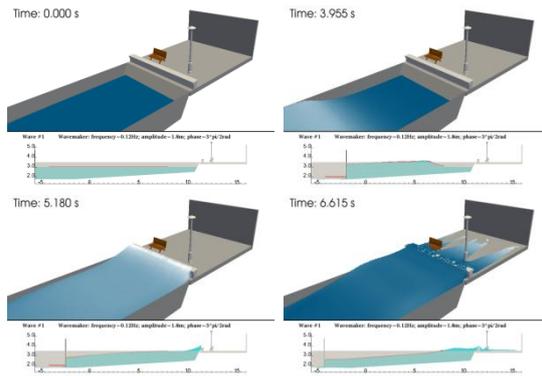


Fig. 8. Instantes de la simulación de la ola #1.

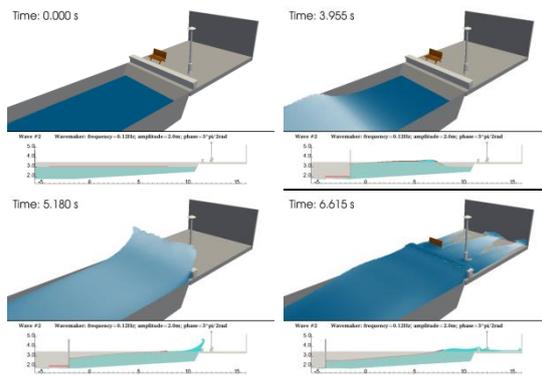


Fig. 9. Instantes de la simulación de la ola #2.

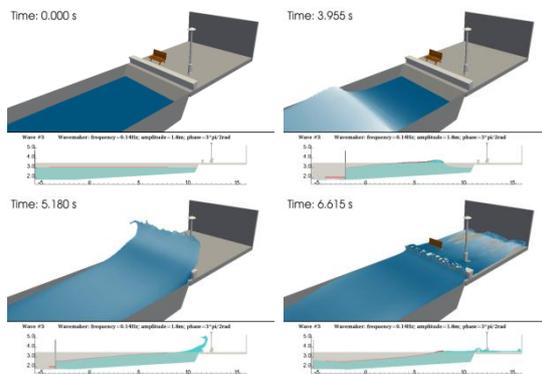


Fig. 10. Instantes de la simulación de la ola #3.

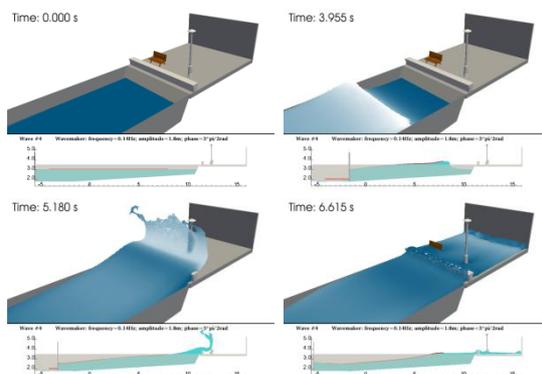


Fig. 11. Instantes de la simulación de la ola #4.

Como se observa en las anteriores Figuras las olas se diferencian tanto en velocidad de propagación (comparando los instantes $t=3.995s$) como en altura (comparando $t=5.180s$) que aumenta de la primera a la última.

4.1.1. Alturas de ola

En la Figura 12 se representan las alturas máximas de la superficie del fluido para cada instante, es decir la historia temporal de las alturas máximas de las 4 olas. Los máximos se han calculado en la zona espacial que corresponde a la propagación de la ola antes de la llegada al muro.

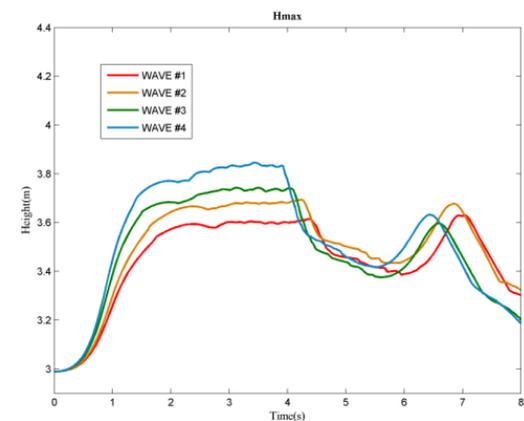


Fig. 12. Serie temporal de las alturas máximas de las 4 olas.

En la Figura 13 se comparan los máximos absolutos de las alturas de ola presentadas en la Figura 12 para las 4 olas generadas. Como ya se comentó anteriormente la ola que alcanza una mayor altura dentro del sistema es la ola #4 la cual fue creada con la mayor amplitud y frecuencia usadas en el pistón. Asimismo la ola más baja es la ola #1 que corresponde al uso de la amplitud y frecuencia menores.

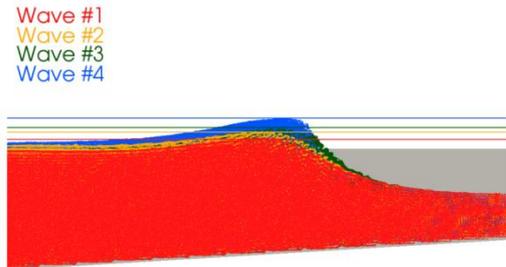


Fig. 13. Alturas máximas absolutas de las 4 olas.

4.1.2. Fuerzas ejercidas sobre el muro
Mediante el uso del código DualSPHysics podemos obtener, a parte de la altura de las olas, otras variables de interés para caracterizar la interacción entre el fluido y el mobiliario urbano que se encuentra en un paseo marítimo (muro, farola y banco).

La primera de ellas será la fuerza (en la dirección de propagación de la ola) ejercida por la ola sobre el muro. Para las partículas contorno que forman parte del muro se calculan y se suman los valores de fuerza que resultan de computar la interacción de estas partículas contorno con las partículas fluidas que estén en su radio de acción. En la Figura 14 se pueden observar los valores de fuerza ejercida por las 4 olas sobre el muro a lo largo de la simulación.

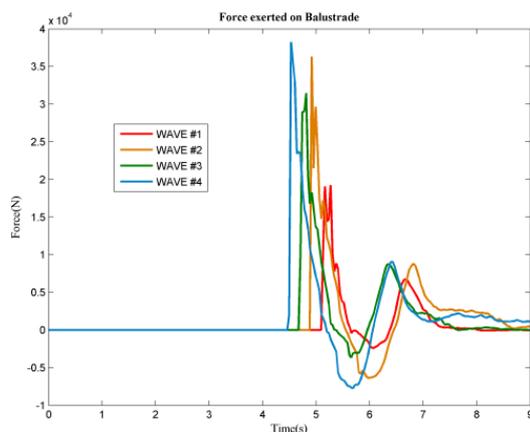


Fig. 14. Serie temporal de la fuerza ejercida por las 4 olas sobre el muro.

Durante los primeros 4 segundos de simulación no se registran valores de fuerza porque las olas (las partículas

fluidas) aún no han alcanzado la posición del muro. Estos valores dejan de ser cero en el orden en el que las olas van llegando al muro desde la ola más rápida (y alta) hasta la más lenta (y baja). Los máximos en fuerza para cada ola corresponden con el instante en el que el impacto es más favorable. En la Figura 15 se observan los instantes en los que cada ola impacta con el muro dando lugar a un máximo en la fuerza. Estos instantes son, por orden de llegada, $t=4.550s$ para la ola #4, $t=4.960s$ para la ola #3, $t=5.025s$ para la ola #2 y $t=5.255s$ para la ola #1.

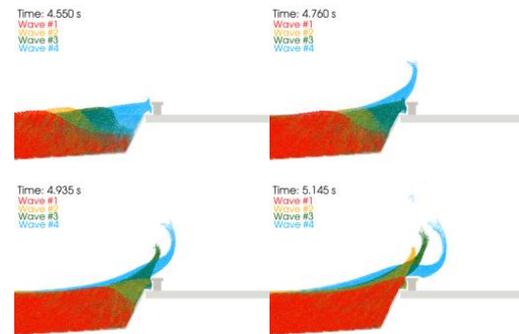


Fig. 15. Instantes del impacto de cada ola con el muro.

A partir del segundo 5.2 de simulación se observan valores negativos de la fuerza para las olas #1 y #2. El valor de fuerza mostrada en la Figura 14 es el resultado de sumar valores positivos (en la dirección de propagación de la ola) y valores negativos (en la dirección contraria). En la Figura 16 se representan por separado los valores positivos (izquierda) y negativos (derecha) de la fuerza.

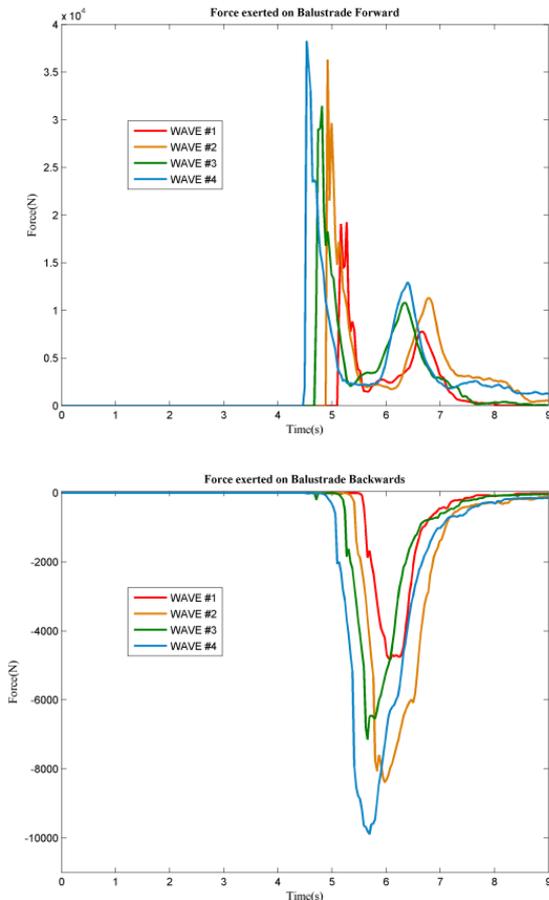


Fig. 16. Serie temporal de la fuerza ejercida por las 4 olas sobre el muro separada en valores positivos (izquierda) y negativos (derecha).

Estos valores negativos se deben a que después de que la ola sobrepase el muro, impacta con el suelo proyectando generando un chorro en la dirección de avance de la ola, pero también en la dirección contraria impactando con la otra cara del muro, la que está mirando hacia la costa. Como podemos observar, en la Figura 16, los valores más negativos pertenecen a las olas #4, #3 y #2, esto se debe a que la cantidad de agua proyectada hacia la otra cara del muro después del impacto contra el suelo es mayor.

4.1.3. Fuerzas ejercidas sobre la farola
 Otro elemento del mobiliario urbano sobre el que se han calculado las fuerzas ejercidas por las olas es la farola. Para calcular numéricamente las fuerzas se sigue el mismo procedimiento que en el

caso del muro, es decir, se suman las fuerzas de interacción registradas en las partículas contorno que conforman la farola y se representan a lo largo del tiempo en la Figura 17.

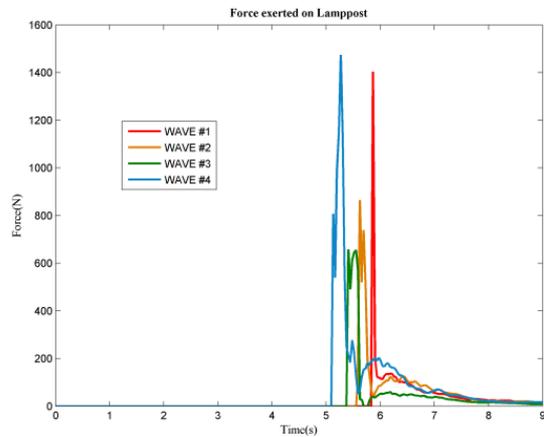


Fig. 17. Serie temporal de la fuerza ejercida por las 4 olas sobre la farola.

Al igual que en el caso del muro, los valores de fuerza de la Figura 17 dejan de ser cero cuando la ola empieza a interactuar con la farola. El orden es también el mismo que en el caso anterior; primero llega la ola #4 a la farola, después la ola #3, ola #2 y finalmente la ola más lenta, la ola #1. Los máximos de fuerza también se registran en este orden y se pueden ver los correspondientes instantes en la Figura 18.

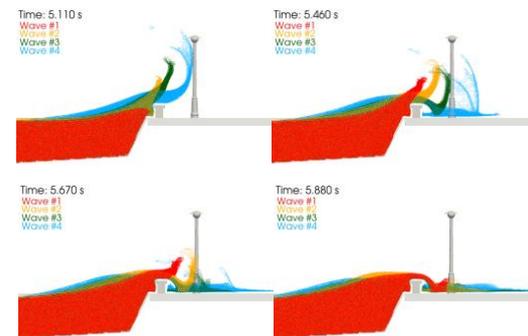


Fig. 18. Instantes del impacto de cada ola con la farola.

Se podría esperar que los valores máximos de fuerza decrecieran de mayor a menor en el orden de llegada de las olas ya que éstas descienden de la #4 a la #1 en altura y velocidad de propagación. Sin embargo, este decrecimiento no se observa en la Figura 17 ya que los máximos de la ola #3, #2 y #1 aumentan en lugar de descender. Esto se debe a que los chorros que se formaron después del impacto con el muro colisionan en diferentes puntos de la vertical de la farola. En la Figura 19 se representa el momento ejercido por las 4 olas. Estos valores de momento sí decrecen cuando la ola es menor y las olas de mayor altura generan chorros que impactan en la farola en un punto más alto dando lugar a un valor de momento mayor.

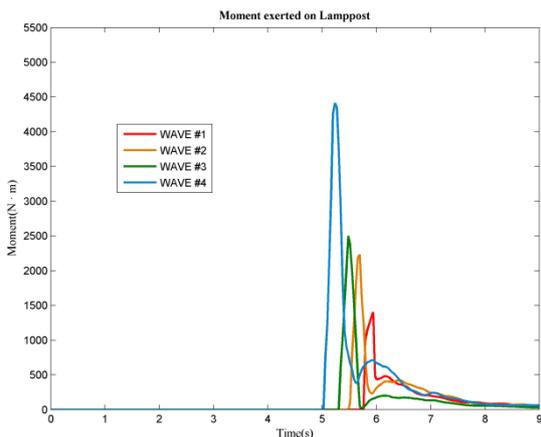


Fig. 19. Serie temporal del momento ejercido por las 4 olas sobre la farola.

En la Figura 20 se representa el porcentaje de momento distribuido a lo largo de la farola. De este modo se puede saber si el impacto ha estado más localizado en un punto o, por si el contrario, está más repartido a lo largo de la vertical.

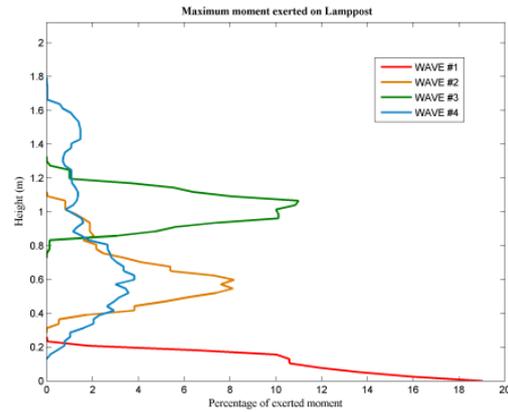


Fig. 20. Distribución en altura del máximo momento ejercido por las 4 olas sobre la farola.

El impacto de la ola #1 está más localizado en la parte baja de la farola, la ola #2 golpea entre las alturas 0.4m y 1.0m y la ola #3 golpea entre los 0.8 m y 1.2 m. Sin embargo las partículas fluidas de la ola #4 (la mayor) no chocan en un solo rango de alturas sino que interaccionan con la farola en diferentes puntos de la vertical. Por otro lado hay que tener en cuenta que los valores de fuerza mostradas en la Figura 17 se calculan como resultado de sumar todos los valores de fuerzas de las partículas contorno de la farola. Teniendo en cuenta estos dos aspectos se pueden dar impactos con la farola que sean más favorables que otros.

4.1.4. Fuerzas ejercidas sobre el banco
 Por último, también se estudian las fuerzas ejercidas como resultado de la interacción entre las olas y el banco. Los valores de fuerza ejercidos sobre el banco se pueden observar en la Figura 21.

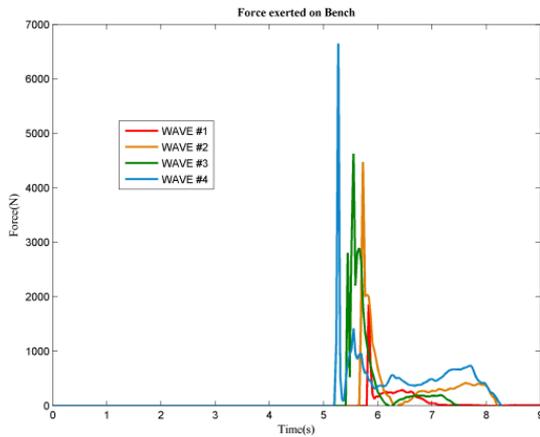


Fig. 21. Serie temporal de la fuerza ejercida por las 4 olas sobre el banco.

El orden de llegada de las olas es acorde a lo esperado, pero no lo es la magnitud de los valores de los máximos de fuerza. Los instantes en los que se registran los máximos de fuerza de las 4 olas aparecen en la Figura 22.

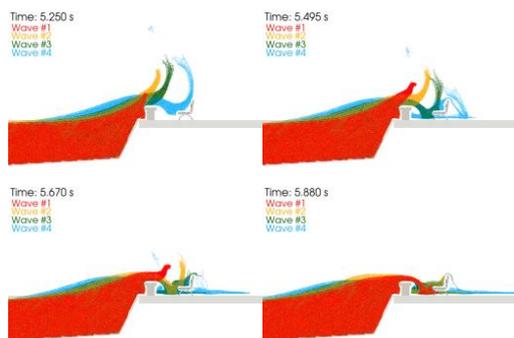


Fig. 22. Instantes del impacto de cada ola con el banco.

Considerando ambas Figuras (21 y 22) se puede observar que en $t=5.250s$ una gran parte del chorro de la ola #4 no impacta con el banco, por lo que el máximo de fuerza es menor que para una ola como la #2 en la que la mayor parte del chorro sí cae sobre el banco generando así un impacto más favorable. Además, en el caso de la ola #2 se observa un único pico en la fuerza en torno a $t=5.670s$ mientras que para la ola #3 se registran dos picos contiguos; el primero en $t=5.495s$ que corresponde al impacto del chorro con el asiento del banco y el segundo pico en torno a

$t=5.6s$ que corresponde al impacto con el respaldo del banco.

Por lo tanto los impactos más favorables (con un valor del máximo mayor) son aquellos en los que una mayor cantidad de partículas fluidas interaccionan en el mismo instante con partículas contorno del banco que pertenecen al respaldo, al asiento y a las patas del banco. Es decir la forma del chorro y los puntos de impacto son una vez más el factor determinante para saber que fuerza ejercen las olas sobre el banco.

5. Conclusiones

Se ha probado que el método SPH puede reproducir tanto cualitativa como cuantitativamente fenómenos de interacción entre estructuras y olas ya que permite simular fácilmente la rotura de la ola, la interacción fluido-estructura y las discontinuidades en el flujo.

Del mismo modo se ha mostrado que el código DualSPHysics es fiable y eficiente permitiendo simular millones de partículas en un tiempo razonable lo que hace posible el estudio de casos más complejos con una mayor resolución, es decir, casos más cercanos a los problemas reales de ingeniería.

Mediante el uso del código DualSPHysics, se ha estudiado un caso real en el que se calculó numéricamente la altura de ola y las fuerzas de interacción entre la ola y el mobiliario urbano que se encuentra en un paseo marítimo (muro, farola y banco). Este estudio puede resultar de gran ayuda en el diseño de modelos preliminares, evitando o reduciendo el costoso proceso de construir modelos a escala.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el proyecto INOU12-03 de la Universidad de Vigo.

Referencias

- Batchelor, G. K. 1974. Introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Dolbow, J., Gerlach, C. 1998. On the completeness of meshfree particle methods. *Int. J. Numer. Mech. Engrg.*, 43, 785–819.
- Bonet, J., Lok, T.-S. L. 1999. Variational and momentum preservation aspects of Smoothed Particle Hydrodynamics formulations. *Computat. Methods Appl. Mech. Engineering.*, 180, 97–115.
- Chen, J.K., Beraun, J.E. 2000. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190, 225–239.
- Crespo, A.J.C., Gómez-Gesteira, M. y Dalrymple, R.A. 2007a. 3D SPH simulation of large waves mitigation with a dike. *Journal of Hydraulic Research*, 45(5), 631–642.
- Crespo, A.J.C., Gómez-Gesteira, M., Dalrymple, R.A., 2007b. Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods. *CMC: Computers, Materials, & Continua*, 5(3), 173–184.
- Crespo, A.J.C., Gómez-Gesteira, M., Dalrymple, R.A. 2008. Modeling Dam Break Behavior over a Wet Bed by a SPH Technique. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 134(6), 313–320.
- Crespo, A.J.C., Dominguez, J.M., Barreiro, A., Gómez-Gesteira, M., Rogers, B.D., 2011. GPUs, a new tool of acceleration in CFD: Efficiency and reliability on Smoothed Particle Hydrodynamics methods. *PLoS ONE*, 6(6), e20685.
- Colagrossi, A., Landrini, M. 2003. Numerical simulation of interfacial flows by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191, 448–475.
- Dalrymple, R. A., Rogers, B. 2006. Numerical modeling of water waves with the SPH method. *Coastal Engineering*, 53, 141–147.
- Dilts, G.A. 1999. Moving-least-square-particle hydrodynamics-I. consistency and stability. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 44, 1115–1155.
- Gingold R.A., Monaghan, J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon Not R Astr Soc* 181, 375–389.
- Gómez-Gesteira, M., Dalrymple, R.A. 2004. Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, 130(2), 63–69.
- Gómez-Gesteira, M., D. Cerqueiro, A.J.C. Crespo and R.A. Dalrymple. 2005. Green water overtopping analyzed with a SPH model. *Ocean Engineering*, 32, 223–238.
- Leimkuhler, B.J, Reich S, Skeel RD., 1997. *Integration Methods for Molecular dynamic IMA Volume in Mathematics and its application.* Springer.
- Liu, G. R. 2003. *Mesh Free methods: Moving beyond the infinite element method.* CRC Press.
- Liu, G. R., Liu, M. B. 2003. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method.* World Scientific.
- Lo, E., Shao, S. 2002. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method. *Applied Ocean Research*, 24, 275–286.
- Lucy, L. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron J* 82(12), 1013–1024.
- Monaghan, J. J. 1982. Why particle methods work. *Siam J. Sci. Stat. Comput.*, 3, 422–433.

- Monaghan, J. J. 1992. Smoothed Particle Hydrodynamics. Annual Rev. Astron. Appl., 30:543-574.
- Monaghan, J. J. 1994. Simulating free surface flows with SPH. Journal Computational Physics, 110, 399-406.
- Monaghan, J. J. 2005. Smoothed Particle Hydrodynamics. Reports on Progress in Physics, 68, 1703-1759.
- Monaghan, J. J. & Kos, A. 1999. Solitary Waves on a Cretan Beach. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 125, 145-154.
- Morris, J., Fox, P., Zhu, Y. 1997. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH. Journal of Computational Physics, 136, 214-226.
- Verlet, L. 1967. Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. Phys. Rev., 159, 98-103.
- Vila, J.P. 1999. On particle weighted methods and SPH. Math. Models Meth. Appl. Sci., 9, 161-210.